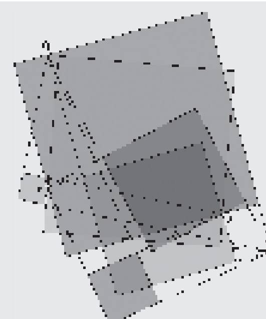
EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 88

nr 6

mei 2013





Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

jaargang 88

nr 6

mei

2013

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur: Marjanne de Nijs, Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,
Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43
E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Postbus 405, 4100 AK Culemborg
Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 70,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 40,00
- studentleden: € 35,00
- gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 40,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Personen (niet-leden van de NVvW): € 65,00
Instituten en scholen: € 145,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 18,00
Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
t.a.v. E. van Dijk
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal
Tel. (0318) 555 075
E-mail: e.vandijk@dekleuver.nl

Kort vooraf

[Marjanne de Nijs]

Examens 2013

Tegen de tijd dat deze *Euclides* op de mat valt zitten we midden in de examentijd. Op moment van schrijven ben ik echter nog hard aan de slag om leerlingen klaar te stomen voor deze exercitie. Persoonlijk kan ik erg genieten van die laatste loodjes. De meesten weten al erg veel en het gaat op een gegeven moment slechts nog om de details en het vertrouwen in eigen kunnen. Zo'n laatste jaar met hen is bijzonder en ik kijk niet uit naar het afscheid – maar lang duurt het niet meer.
Mocht u ook een of meerdere eindexamenklassen hebben en iets kwijt willen over de reguliere, digitale of pilotexamens, dan horen we dat graag. In het eerste nummer van de komende jaargang kijken we weer uitgebreid terug op deze examentijd.

Eindrapport cTWO

Afgelopen januari werd door de commissie Toekomst WiskundeOnderwijs, cTWO, haar eindrap port *Denken en doen, wiskunde op havo en vwo per 2015* aan de staatssecretaris van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen gepresenteerd. Theo van den Bogaart informeert u er in deze *Euclides* uitgebreid over.
Een van de onderwerpen die genoemd wordt in dit rapport, is meer samenhang tussen bètavakken. In een samenwerkingsverband tussen cTWO en SLO schreven Nico Alink en Roel van Asselt, samen met collega's van diverse scholen en van de SLO, hiervoor een handreiking: *Samenhang en afstemming tussen wiskunde en de bètavakken en economie*. Een situatie die voor veel scholen nog op het verlanglijstje staat; wellicht is hun artikel aanleiding om er echt werk van te maken.
Direct na het verschijnen van het cTWO-eindrapport organiseerde het bestuur van de NVvW hierover een ledenraadpleging, middels een digitale enquête. Op de verenigingspagina's vindt u een overzicht van de uitkomsten.

Als een kikker

We kennen waarschijnlijk allemaal het kikker-in-de-pan-effect: een kikker springt direct uit een pan kokend water, maar zou je het water geleidelijk opwarmen, dan loopt het slecht met hem af omdat hij blijft zitten waar hij zit. Deze metafoor kwam bij mij boven toen ik in de *WiskundE-brief* las over het boycotten van de rekentoets. Ik vermoed dat veel collega's bij deze oproep instemmend zullen knikken. Maar hoeveel stappen hebben we dan al gemist?
In oktober 2009 was al duidelijk dat de rekentoets ingepland zou worden in 2014, inclusief gebruik van de rekenmachine en verwijzing naar de referentieniveaus. Er werd uitgebreid over gepubliceerd in de *WiskundE-brief*, in uw vakblad en op de NVvW-site. Wat hebben we indertijd gedacht?
Lonneke Boels kijkt nog eens naar de aanleiding van dit alles – gaan de rekentoetsen werkelijk de problematiek oplossen waarvoor ze in het leven zijn geroepen? Duidelijk is in ieder geval dat scholen een rekenbeleid moesten ontwikkelen als dat nog niet eerder op de agenda stond.
Op verzoek van het ministerie van OCW bracht het APS in kaart hoe vo-scholen rekenen en rekenonderwijs hebben aangepakt. APS-medewerkers beschrijven het onderzoek en informeren u over de resultaten. En als we het dan toch weer over rekenen hebben: Ab van der Roest kijkt kritisch naar zijn kennis over het 'delen door is vermenigvuldigen met het omgekeerde'.
Gelukkig de laatste jaren ook steeds meer aandacht voor rekenzwakke leerlingen. Met als belangrijkste wapenfeit het verschijnen van de ERWD-protocollen. Prof.dr. J.E.H. van Luit geeft een helder overzicht van het vo-protocol. Doe er uw voordeel mee.

En hoe we kunnen voorkomen dat we 'gekookt' worden? Dat lijkt lastig in het onderwijs waar de waan van de dag het vaak lijkt te winnen van het kijken naar ontwikkelingen op lange termijn. We blijven u informeren en hopen dat u tijd blijft vinden om kritisch mee te kijken en van u te laten horen.

Inhoud

Klein vakdidactisch onderzoek Algebra

DEEL 5

[Rianne Florijn en Ton Konings]

Dit is het vijfde artikel in een serie van zes over 'Klein vakdidactisch onderzoek Algebra'. De artikelen zijn geschreven als afsluiting van een cursus Vakdidactiek Algebra [1] aan de tweedegraads lerarenopleiding wiskunde van het Instituut voor Leraar en School van de HAN in Nijmegen. De eerste vier artikelen werden geschreven door deeltijdstudenten, meestal beginnende docenten, naar aanleiding van ervaringen in de klas. Aan de hand van de bestudeerde theorie analyseerden ze die ervaringen, ze maakten voornemens en konden die soms ook nog uitvoeren. De artikelen werden voor plaatsing in 'Euclides' in samenwerking met de docent, Ton Konings, nog grondig bewerkt. Ook ontwikkelde hij daarbij een beoordelingsinstrument voor vergelijkbare artikelen bij volgende cursussen. De ontwikkeling en het effect van dat instrument wordt in het zesde artikel van deze serie besproken. Dit vijfde artikel is geschreven door een derdejaars voltijdstudent na lezing van de eerste vier artikelen van deze serie en met instructie van het genoemde beoordelingsinstrument.

Berekenen van de stapgrootte in vmbo-K
Met een stappenplan of niet?

Probleemsituatie

In mijn stage heb ik lessen bijgewoond en gegeven aan een derde klas vmbo-kader van de afdelingen schilderen en timmeren, met 6 meisjes en 19 jongens. Dit artikel bespreekt enkele problemen van leerlingen bij het hoofdstuk Lineaire verbanden uit *Getal & Ruimte*.[2] Sommige leerlingen begrijpen de leerstof snel, anderen vinden het ontzettend moeilijk. Vooral veel jongens werken te snel en slordig: ze schrijven weinig berekeningen op. Ze leren een stappenplan om bijvoorbeeld een lineaire formule bij een tabel op te stellen, maar weten vaak niet precies waarmee ze bezig zijn. Met name het berekenen van de stapgrootte bij het opstellen van een formule leidde in de toets tot veel problemen (***zie figuur 1***).

Het percentage van de punten die leerlingen bij de opgaven ***in figuur 1*** hebben gehaald (de p-waarden) zijn respectievelijk 88%, 34% en 52%.

De moeilijkheidsgraad van de drie opgaven is aan de hand van onderstaande punten vast te stellen. (In *Getal & Ruimte* worden in afwijking van andere schoolmethoden in $y = ax + b$ als termen voor b en a respectievelijk het *begingetal* en de *stapgrootte* gebruikt.)

1. Is in de tabel het *begingetal* gegeven? (ja / nee)
2. Is in de tabel *x in stappen van 1* gegeven? (ja / nee)
3. Is de stapgrootte *positief* (ja / nee)
4. Is de *stapgrootte direct af te lezen*? (ja / nee, die moet nog bepaald worden)
5. Gaat het om een berekening van de stapgrootte met *gehele getallen*? (ja / nee, om breuken of decimale getallen)

Het succes bij opgave 11 kun je verklaren vanwege vier keer 'ja' bij bovenstaande criteria. Het begingetal is gegeven, de variabele x wordt steeds met 1 verhoogd en de stapgrootte is direct af te lezen.

De moeilijkheid bij opgave 12 zit in vier keer 'nee' (alleen punt 3 is 'ja'). Veel leerlingen gaven 5,50 als begingetal. Als stapgrootte werd – in plaats van 0,3 – vaak 3 euro genoemd, omdat dit tussen de twee eerst gegeven prijzen zit.

Vraag 13 (drie keer 'nee', twee keer 'ja') werd weer wat beter gemaakt. Hierbij is de moeilijkheid: geen begingetal, stapgrootte negatief en niet meteen af te lezen (en dan is de stapgrootte berekenen met 30 : 2 = 15 net iets moeilijker dan het aflezen van het verschil van 15 tussen 5 en 6). Het begingetal is iets lastiger doordat je van 3 niet in stappen van 30 terug kunt naar 0, maar eerst de stapgrootte moet hebben berekend.

Bij opgave 12 werd vaak 1 punt (van de 2) gescoord door het juiste begingetal te bepalen. Opgave 13 werd meestal geheel goed of geheel fout gemaakt. In beide gevallen zit het probleem dus in het bepalen van de stapgrootte.

Een vergelijkbare analyse heb ik gemaakt van de opgaven over het bepalen van de formule vanuit een gegeven grafiek. Ook hier blijkt het bepalen van de stapgrootte het probleem. In dit artikel beperk ik me tot het bepalen van de formule bij een gegeven tabel.

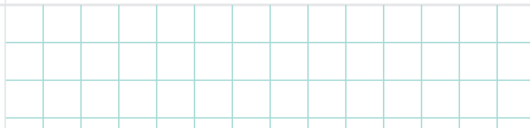
Analyse van de leerstof

De leerstof in het boek voor klas 3, vmbo-k deel 1, grijpt terug op wat in 1 vmbo-kgt deel 2 is behandeld. Daar is ook al bij een tabel een formule opgesteld, maar dan ging het om een eenvoudiger tabel (met bijna allemaal 'ja' op bovenstaande vragen). Het opstellen van een lineaire formule bij een tabel beperkte zich tot het type van opgave 11: begingetal gegeven, een onafhankelijk variabele met stapjes van 1 en afleesbare stapgrootte. In klas 2 worden lineaire vergelijkingen opgelost, maar het opstellen van lineaire formules komt pas terug in leerjaar 3. En daarmee is deze vaardigheid dan ook behoorlijk weggezakt.

Hier wordt een samenvatting gegeven van het hoofdstuk voor zover relevant voor het bovengenoemde probleem.

Paragraaf 1: Van formule naar grafiek

In de eerste paragraaf leren de leerlingen vanuit een formule een grafiek te maken. De termen *verband*, *variabele*, *woordformule*, *begingetal*, *stapgrootte*, *lineaire formule*, *grafiek* en *lineair verband* vallen. De stapgrootte in een formule wordt gedefinieerd als *'het getal vóór de variabele'*. De stapgrootte heb je nodig om naast het beginpunt een tweede punt van de grafiek te bepalen. Daarna kan tussen beide punten een rechte lijn getrokken worden.



Paragraaf 2: Gelijkmatige toename of afname
Dit illustreren we ***in figuur 2*** met een voorbeeld uit het boek.
Je ziet nog wel eens dat leerlingen in het berekenen van de stapgrootte met:

$$\textit{stapgrootte} = \frac{\textit{toename onder}}{\textit{toename boven}}$$

in de war komen met de 'toename onder' die boven de breukstreep staat. Ook is het denkbaar dat de term 'stapgrootte' verward wordt met het zetten van stappen in de tabel, of stappen opzij of omhoog in de grafiek.

Paragraaf 3: Van tabel naar formule
Figuur 3 geeft de kern weer van de leerstof, die met de proefwerkopgaven ***in figuur 1*** samenhangt.
Om bij een tabel zelf een formule te maken lijk je via een stappenplan een invulpuzzel te moeten maken.
Het is een hele reeks stappen, die geïllustreerd wordt met een aanzienlijk eenvoudiger voorbeeld dan proefwerkopgaven 12 en 13 (figuur 1): van de vijf genoemde punten zijn in het voorbeeld ***bij figuur 3*** alleen de eerste twee 'nee'.
De vraag die rijst is: in hoeverre is dit stappenplan behulpzaam bij moeilijkere tabellen? Hierop komen we verderop in dit artikel terug.
In de paragrafen 4 (Van grafiek naar formule) en 5 (Stapgrootte) leert de leerling uit een gegeven grafiek de formule op te stellen. Ook hierbij is het bepalen van de stapgrootte, als die niet direct is af te lezen, het grootste probleem.

Analyse vanuit de literatuur
In bovenstaande analyse blijkt dat leerlingen vastlopen met het toepassen van een stappenplan als de situatie enigszins afwijkend is van wat ze gewend zijn. Ze lijken het overzicht kwijt te zijn.
Voor het hebben van overzicht, dat noodzakelijk is om een efficiënte strategie te kunnen volgen, wordt ook wel de term 'rijk betekenisvol schema' (of 'cognitief schema') gebruikt: een netwerk van begrippen dat langzaam in samenhang met elkaar is opgebouwd. 'Lineair verband' is een voorbeeld van een kernbegrip met een rijk betekenisvol schema. (zie [3]; pp. 31-32).

11 Maak de formule bij de onderstaande tabel.

a	0	1	2	3
B	30	22	14	6

12 Maak de formule bij de onderstaande tabel.

aantal foto's	10	20	40
P in euro's	5,50	8,50	14,50

13 Maak de formule bij de onderstaande tabel.

t in uren	3	5	6
A in km	55	25	10

figuur 1 Drie proefwerkopgaven, waarbij bij een gegeven tabel een lineaire formule moet worden opgesteld

Gelijkmatige toename en afname
In sommige tabellen is in de bovenste rij de toename steeds hetzelfde. Komt er in de onderste rij ook steeds hetzelfde bij? Dan is er sprake van **gelijkmatige toename**.

WEL GELIJKMATIGE TOENAME

+1 +1 +1

t	0	1	2	3
I	3,5	7	10,5	14

+3,5 +3,5 +3,5

t: tijd in minuten
I: inhoud in liters
In de tabel zie je:
voor elke minuut komt er 3,5 liter bij.
De **stapgrootte** is 3,5.

GEEN GELIJKMATIGE TOENAME

+2 +2 +2

t	0	2	4	6
I	5	8	12	16

+3 +4 +4

t: tijd in minuten
I: inhoud in liters
In de tabel zie je:
voor elke 2 minuten komt er *niet* hetzelfde bij.

In de tabel hiernaast is de toename in de bovenste rij steeds hetzelfde. In de onderste rij is de afname hetzelfde. We spreken dan van **gelijkmatige afname**.

+2 +2 +2

t	0	2	4	6
I	100	90	80	70

−10 −10 −10

Je kunt onderzoeken of er in een tabel sprake is van een gelijkmatige toename of afname. Dat gaat zo:
- Je schrijft de toename of afname boven en onder de tabel.
- Dan maak je steeds de deling $\frac{\text{toename onder}}{\text{toename boven}}$.
- Als de uitkomst steeds hetzelfde is, dan is het een tabel met een gelijkmatige toename of afname. De uitkomst van de deling is dan de stapgrootte.

figuur 2

Van tabel naar formule
Bij een tabel met een gelijkmatige toename of afname kun je een lineaire formule maken. Je zoekt dan naar de **stapgrootte** en het **begingetal**. De formule ziet er zo uit:

variabele onder in de tabel → .... = ... +/− .... × .... ← variabele boven in de tabel
begingetal, stapgrootte

Voorbeeld
Maak zo mogelijk een formule bij de tabel

+2 +2

t	2	4	6
hoogte in m	10	18	26

+8 +8

Aanpak
1 Controleer of de tabel een gelijkmatige toename heeft. Zo ja, dan heb je de stapgrootte. Om het begingetal te vinden zoek je de hoogte bij $t = 0$.
2 De formule begint met de variabele onder in de tabel. — hoogte in m = ...
3 Bij $t = 0$ hoort hoogte = 10 − 8 = 2, het begingetal is 2. — hoogte in m = 2 ...
4 Er is een gelijkmatige toename, dus +. — hoogte in m = 2 + ...
5 De stapgrootte is $\frac{8}{2} = 4$. — hoogte in m = 2 + 4 ...
6 De variabele boven in de tabel is t.
7 Controleer je antwoord. — **hoogte in m = 2 + 4 × t**

Uitwerking
Bovenste rij: toename steeds 2.
Onderste rij: toename steeds 8, dus gelijkmatige toename.
formule: hoogte = 2 + 4t
controle: hoogte = 2 + 4 × (2) = 10, klopt
: hoogte = 2 + 4 × (4) = 18, klopt
: hoogte = 2 + 4 × (6) = 26, klopt

figuur 3

naar: **van**	**situatie**	**tabel**	**grafiek**	**formule**
situatie	herstructureren, relevante gegevens opzoeken	uit gegevens van een situatiebeschrijving een tabel invullen	schetsen van een grafiek vanuit een situatiebeschrijving	vinden van een formule uit een situatiebeschrijving
tabel	lezen en interpreteren van gegevens	een tabel tot een andere tabel maken, bijv. tabel uitbreiden	getallenparen in een rooster plotten en lijn trekken	opstellen van een formule uit een tabel
grafiek	interpreteren van karakteristieken van de grafiek	aflezen van coördinaten	van de ene grafiek een andere maken	vinden van een formule bij een gegeven grafiek
formule	herkennen van een formule, vuistregel	substitueren, berekenen	schetsen van een grafiek vanuit een voorschrift	herleiden, een formule omschrijven, bijv. bij oplossen vergelijkingen

figuur 4

werken aan begrip	**werken aan basisvaardigheid**
wiskunde begrijpen	veel oefenen
strategisch werken	met stappenplannen werken
globaal kijken	lokaal kijken
algebraïsch redeneren	algebraïsch rekenen
visueel, denkmodellen	getalsmatig en formulematig
meerdere manieren	één manier
meer voorstellingsvormen	alleen formules
gevarieerde oefening	veel van hetzelfde in voortgaande complicering
betekenis geven aan expressies	kaal manipuleren
schema's van technieken	geïsoleerde technieken
klassikale reflectie	ndividueel veel sommen maken
leerling-docent-interactie	zelfwerkzaamheid
generaliseren regels gehele getallen	afleiden van formules uit formules
waarom is iets fout ?	alleen maar verbeteren
uitzoomen	inzoomen

figuur 5

WERKBLAD 'VAN TABEL NAAR LINEAIRE FORMULE'
VMBO-KADER 3e KLAS

HOE ZOEK JE DE OPLOSSING BIJ EEN MOEILIJKE PROEFWERKOPGAVE?

Vraag 1
Hieronder staat een moeilijke proefwerkopgave (opgave 12) uit het proefwerk van vorig jaar. Probeer deze opgave te maken. Als je het moeilijk vindt, maak dan eerst (hulp)opgave 2 en/of 3.

12 **Maak de formule bij de onderstaande tabel.**

aantal foto's	10	20	40
P in euro's	5,50	8,50	14,50

Vraag 2
a) **Bedenk een verhaaltje** bij de tabel.
b) Leg met het verhaaltje uit wat de waarden 10 en 5,50 betekenen.
c) Leg met het verhaaltje uit: waarom staat er onder 20 niet 11 en onder 40 niet 22?

Vraag 3
Breid de tabel uit voor een aantal handig gekozen waarden van het aantal foto's en bereken daarbij P in euro's.

Vraag 4
Hieronder staan twee **foute uitwerkingen** van leerlingen die ze tijdens de toets hebben gemaakt.

Anne:	Bart:
12) $P = 5{,}50 + 0{,}225 \times t$ *stapgrootte* $= 9 : 40 = 0{,}225$	12) $P = -24{,}50 + 3 \times t$

a) Welke denkfout heeft Anne gemaakt?
b) Leg dit uit waarom deze fouten gemaakt zijn. Doe dit met behulp van woorden als: begingetal, stapgrootte, goede variabelen, rekenfouten, berekeningen, enz.
c) Welke fouten heeft Bart gemaakt? Leg ook dit uit.
d) Welke **valkuilen** zijn er bij dit soort opgaven?

Vraag 5
Hoe kun je **controleren** of jij bij vraag 1 de goede formule hebt gevonden?

figuur 6

Figuur 4 geeft daar een beeld van. Het is afgeleid van het zogeheten 'schema van vertaalvaardigheden' (zie [3]; p. 29 en pp. 124-126), dat een overzicht geeft van het domein van de schoolalgebra in zijn algemeenheid. In de tabel ***in figuur 4*** is het hokje van de hier besproken vaardigheid gearceerd.
De bruikbaarheid van dit schema van vertaalvaardigheden voor de docent is (zie [1]; p. 45):
- Het geeft overzicht van en een structuur voor een indeling van leerdoelen voor de leerling.
- Het maakt duidelijk dat ook de eerste rij (van situatie naar …) en de eerste kolom (van … naar situatie) belangrijke wiskundige vaardigheden zijn.
- Het geeft didactische steun voor manieren voor het oplossen van opgaven en manieren om leerlingen te helpen, met name voor het begrijpen van abstracties bij formules zijn concretiseringen in situaties, tabellen en grafieken behulpzaam.

Het schema illustreert de hoeveelheid (en diversiteit aan) vaardigheden die een leerling bij lineaire verbanden moet leren. Als dat een verzameling losstaande stappenplannen is, ziet de leerling door de bomen het bos niet meer.
Als leerlingen een probleem hebben met een vaardigheid, kunnen de vaardigheden in de vakjes in dezelfde rij behulpzaam zijn. Zo geldt dat het uitbreiden van een tabel voor leerlingen veel eenvoudiger is dan het opstellen van een formule (zie [1]; p. 73). Flexibel wisselen tussen de diverse vertaalvaardigheden karakteriseert begrip en inzicht van de leerling.
Hoe je als docent hieraan kunt werken wordt in [3; p. 139] samengevat als zorgen voor een goed evenwicht tussen twee soorten van werkwijzen, die hand in hand gaan (***zie figuur 5***).
Het tweede rijtje in deze tabel maakt duidelijk dat er goed geoefend moet worden. Echter hierover wordt in [3; p. 114] onder andere gezegd: 'Oefenen op een lange rij gelijksoortige sommetjes leert een leerling om geroutineerd een regel uit te voeren in standaardsituaties, maar de leerling is machteloos bij een voor hem nieuw probleem.' En, 'Oefenen is noodzakelijk om door inzicht verworven vaardigheden te verankeren. Het effect van oefeningen zal voor de meeste leerlingen groter zijn naarmate de opdrachten meer van het denkvermogen vragen, meer eigen inbreng van de leerling uitlokken en meer mogelijkheden tot reflectie bieden.'
De woorden, die in het eerste rijtje vetgemaakt zijn, zullen een leidraad

vormen voor een ontwerp verderop in dit artikel. Dat zijn erg dure woorden in de context van vmbo-kader klas 3, maar ze moeten gezien worden in de context van het eindexamenprogramma en vmbo-k-examenopgaven, waarin voortdurend koppelingen gemaakt worden met beschreven realistische situaties. De vaardigheden ***in figuur 4*** 'van en naar een situatie' zijn onderdeel van elke (deel) opgave. Kortom, in het vmbo is het leggen van relaties met 'waar gaat het over' en 'wat betekent het' voortdurend van belang (zie [1]; p. 37).
Faes e.a. (zie [3]; p. 60) doen de aanbeveling om veelvuldig wiskundetaal met contexttaal te blijven aanvullen.

Probleemstelling

Na de analyse van het gestelde probleem vanuit de leerstof en literatuur formuleren we nu de kern van het probleem.
Leerlingen hebben bij een complexe tabel moeite met het opstellen van een formule vanuit een tabel, en in het bijzonder het vinden van de stapgrootte. Stappenplannen zijn behulpzaam bij eenvoudige situaties. Ten behoeve van meer complexe situaties zal de leerling werkwijzen geleerd moeten hebben die globaler van aard zijn, waarbij de relatie met de situatie gelegd wordt, waarbij eenvoudiger vertaalvaardigheden worden aangesproken, waarbij betekenis wordt gegeven aan uit te voeren stappen en het gezonde verstand van leerlingen wordt aangesproken.

Concrete voornemens

Voor een volgende uitvoering in een vergelijkbare lessituatie heb ik een werkblad (***zie figuur 6***) ontworpen dat recht probeert te doen aan de vetgemaakte trefwoorden in de eerste kolom van figuur 5.
Juist veelgemaakte fouten kunnen een goed uitgangspunt zijn voor bevorderen van nadenken door leerlingen en uitwisselen van meerdere manieren van aanpak. Het idee is dat ik ze eerst aan de slag zou willen zien zonder hulp, dan bewust wil maken van strategieën waarmee ze, als ze het niet weten, naar een oplossing kunnen zoeken (vraag 2 en 3), en ze vervolgens valkuilen (vraag 4) en controle middelen (vraag 5) laat zien.
Het werkblad beoogt het startpunt te zijn van een onderwijsleergesprek als voorbereiding op een nieuw proefwerk, met hopelijk een beter resultaat.

Noten

[1] Bij de cursus werd gebruik gemaakt van een conceptversie van: J. Faarts, e.a. (2012): *Algebra voor leerlingen van 12-16, voor de lerarenopleiding*. Utrecht: APS.

[2] *Getal & Ruimte*, 3 vmbo-kader, deel 2. Houten: EPN (2008)

[3] T. Faes, T. Goris, e.a. (2011): *Het leren van wiskunde – Leren effectief lesgeven*. Utrecht: APS.

Over de auteurs

Rianne Florijn is derdejaars voltijdstudent aan de tweedegraads lerarenopleiding wiskunde van het Instituut voor Leraar en School van de HAN in Nijmegen.
E-mailadres: *AM.Florijn@student.han.nl*
Ton Konings is lerarenopleider aan het Instituut voor Leraar en School van de HAN in Nijmegen, en medeauteur van een serie vakdidactiekboeken voor de tweedegraads lerarenopleiding wiskunde.
E-mailadres: *Ton.Konings@han.nl*

Samenhang en afstemming

TUSSEN WISKUNDE EN DE BÈTAVAKKEN EN ECONOMIE

[Nico Alink en Roel van Asselt]

De invoering van de vernieuwde examenprogramma´s vanaf 2015 in vwo-4 en havo-4, en de invoeringen van de overige vernieuwde bètaprogramma's vanaf 2013, vormen een goede kans om structureel een betere afstemming en samenhang te realiseren tussen (bèta)vakken binnen de profielen. Afstemming van vakken en profielsamenhang zijn geen nieuwe 'items' binnen scholen. Welke mogelijkheden zijn er en aan welke randvoorwaarden moet voldaan worden om afstemming en samenhang beter van de grond te krijgen? In een samenwerkingsverband tussen cTWO en SLO hebben de auteurs van dit artikel, samen met collega's van diverse scholen en van de SLO, de handreiking (zie [3]) hiervoor geschreven.

In het schooljaar 2011-2012 hebben wij met docenten van verschillende scholen gesproken om een beeld te krijgen van de mogelijkheden en wensen op het punt van afstemming tussen wiskunde en de andere bètavakken en economie, zeker in het licht van de vernieuwde programma's voor al die vakken. De gesprekken hebben wij gevoerd met koppels van wiskundedocenten en docenten van één van de andere bètavakken of van economie. Het resultaat is te vinden in de handreiking 'Samenhang en afstemming tussen wiskunde en de profielvakken'.[3]
Uit ons onderzoek is gebleken dat docenten in het vo zeer gemotiveerd zijn om meer samenhang en afstemming na te streven binnen de profielen. Dat dit nog steeds onvoldoende uit de verf komt, is algemeen bekend. Uit de 'fouten' uit het verleden is voldoende lering te trekken om nu, met meer garanties op succes, binnen de vernieuwde programma's aan de slag te gaan.

Samenhang en afstemming

We gaan in dit artikel expliciet in op de afstemming van het vak wiskunde met de overige bètavakken en economie, en indirect tevens op verbetering van de aansluiting op het hoger onderwijs. Samenhang en afstemming is een van de motieven voor de vernieuwing van de wiskunde-examenprogramma's voor havo en vwo vanaf 2015. (Voor uitgebreidere informatie over deze vernieuwing zie [1] en [2].)

Onder *samenhang* verstaan we in deze context de inhoudelijke verwevenheid van de bètavakken en de organisatie van het leerproces gericht op ondersteuning, versterking of aanvulling van deze vakken onderling. In samenhang is ook begrepen de organisatie van het leerproces.
Onder *afstemming* verstaan we het resultaat van (docenten)overleg over concrete zaken zoals het verschil en overeenkomst in notaties, nomenclatuur, begripsomschrijvingen, gebruik van grootheden en eenheden, enzovoort, en (vooral) hoe dit vorm krijgt in het gebruik van voorbeelden, toepassingen, denkactiviteiten, vraagstukken of contexten (zie [3]). Afstemming is dan een voorwaarde voor samenhang.

Bij het ontwikkelen van de vernieuwde bètavakken is al veel overleg gevoerd tussen de vijf vernieuwingscommissies over samenhang binnen de programma's. Maar naar onze mening is van een substantiële samenhang nog geen sprake. We gaan hier in op de mogelijkheden om, binnen vo-scholen, concrete vormen van *afstemming* te realiseren. In het genoemde document (zie [3]; pp. 89-107) is een overzicht opgenomen van mogelijke afstemmingsrelaties tussen wiskunde en de bètavakken en economie.

Waarom afstemming?

We geven enkele motieven aan om tot meer afstemming van vakken te komen:

1. Gebruik van onderling uitwisselbare voorbeelden, vraagstukken en contexten geeft – vanuit het perspectief van de leerling en de zingevingvragen over vakinhouden – aan elk van de vakken meer betekenis (en dus motivatie en uitdaging) aan de leerling.
2. De leerresultaten verbeteren indien in verschillende situaties en in meerdere toepassingen een vakonderdeel wordt toegelicht, gebruikt en geoefend, en indien consequent dezelfde notaties, eenheden, formules, nomenclatuur enz. worden aangehouden.
3. Een van de bronnen van de aansluitingsproblematiek is de omstandigheid dat studenten in het begin van de ho-studie niet bedacht zijn op het geïntegreerd gebruik van begrippen en toepassingen binnen verschillende leergebieden in het ho.[4] Door afstemming van vakken en concrete voorbeelden uit het ho kan hierop worden ingespeeld.
4. Gelet op het toenemen van multidisciplinaire innovaties is er in het beroepenveld een onmiskenbare vraag naar ho-afgestudeerden die interdisciplinair in heterogene teams kunnen en willen werken.[5] Het voortgezet onderwijs kan de leerlingen hierop voorbereiden.

Naast leerwinst wordt ook soms het effect van verkorting van de leertijd genoemd, indien vakken goed afgestemd en in 'medegebruik' worden aangeboden. Hoewel wij daar enig geloof aan hechten, ontbreken onderzoeksresultaten die leertijdwinst door vakafstemming aantonen.

Aan de slag op school

Wanneer enthousiaste docenten afstemming met succes gestalte willen geven, is expliciet schoolbeleid een noodzakelijke voorwaarde. Het gaat om schoolbeleid dat gericht is op samenhang en afstemming binnen profielen, waarmee feitelijke uitvoering van afstemming mogelijk wordt gemaakt. Wanneer deze voorwaarde niet is vervuld, en structureel werken aan afstemming niet

kansrijk is, dan luidt ons advies: *begin er niet aan!*
Bij dat beleid denken we immers concreet aan de beschikbaarheid van overlegtijd tussen docenten en/of profielteams, faciliteren van koplopers, aanstellen van combi-docenten, stimuleren van collegiale en veilige leer- en overlegomgevingen en, waar nodig, roosteraanpassingen.
Een kleine bloemlezing van activiteiten die enkele scholen zoal ondernemen rond samenhang en afstemming van profielvakken geeft direct aan dat dat niet zonder planvorming, gerichte middelen en schoolbeleid kan plaatsvinden.

Activiteiten binnen de eigen lessen

- Afstemming van de momenten waarop gemeenschappelijke vakinhouden in de tweede fase aan de orde komen om samenhang zo zinvol mogelijk te maken.
- Vraagstukken met contexten uit andere vakken in de schoolexamens opnemen.
- Modules NLT aanscherpen op intensiever gebruik van de domeinen uit de verschillende wiskundevakken.
- In de wiskundeles voorbeelden en toepassingen uit andere vakken inzetten (zie ook verderop in dit artikel).

Activiteiten buiten de reguliere lessen

- Een aantal profielmiddagen per jaar waarin afstemming aan de orde komt.
- Gezamenlijk opstellen van toetsen rond rekenvaardigheden door bèta- en/of economiedocenten.
- Profielwerkstukken rond samenhangende en afgestemde vakinhouden.
- Vakoverstijgende projecten aanbieden dan wel laten kiezen.
- Extra lessen inroosteren om toepassingen tijdig zichtbaar te maken en om daarmee te oefenen.

Ondersteunende activiteiten

- Traditionele docent-studiedagen aan vakafstemming wijden.
- Organiseren van gestructureerd, gemengd vaksectieoverleg over samenhang, afstemming en toetsing op inhoudelijk en didactisch niveau.
- Ouders betrekken bij het geven van gastlessen waarbij samenhang zichtbaar wordt en afstemming noodzakelijk blijkt.
- Faciliteren van docenten voor overleg en extra inzet.
- Inzet voor en effecten van afstemmingsactiviteiten opnemen in de onderwijskwaliteitsmetingen.

Welke keuze(s) een school ook maakt, zonder planning, school- en afdelingsbeleid is het niet mogelijk de (eigen) aanpak te realiseren. Het verdient de voorkeur om binnen een havo- of vwo-afdeling via gerichte en toetsbare *projecten* samenhang en afstemming van de grond te krijgen.
In feite is dat een tweede noodzakelijke voorwaarde voor succes.
Het hoeft geen betoog dat hiermee niet in de bovenbouw kan worden begonnen, zonder dat er in de onderbouw van het vo al gewerkt is aan betrokkenheid van de schoolvakken op elkaar door leerlingen en docenten. Ook deze verticale, doorlopende leerlijnen vragen om expliciet schoolbeleid.
We zien het als een derde succesconditie.
Het SALVO-project heeft in de loop van de jaren al veel voorbeelden en toepassingen van afstemming in de onderbouw en bovenbouw zichtbaar en bruikbaar gemaakt (zie [6]).

Aan de slag met en binnen vaksecties

Een eerste stap is om structureel overleg over samenhang tussen vaksecties op te zetten. De eerder genoemde afstemmingslijsten maken al veel mogelijkheden zichtbaar en dat kan zo'n overleg stimuleren.
Van belang is wel om niet direct voorbeelden te zoeken en in te plannen in de eigen lessen, maar eerst goed te onderzoeken welke didactische en contextuele keuzes binnen de afzonderlijke vakken en lessen worden gemaakt: wat zijn verschillen en overeenkomsten en hoe kunnen we de leerlingen daarop wijzen?
Een aantal van deze 'discussievraagstukken' uit de biologie, natuurkunde en economie is opgenomen in [3] (pp. 31-52).
In de praktijk blijkt samenhang en afstemming het beste mogelijk te zijn tussen wiskunde en natuurkunde, duidelijk meer dan bij de andere genoemde vakken.
Dat zal geen verwondering wekken. Het is voor ons de voornaamste reden om hier te kiezen voor een voorbeeld uit de vakkencombinatie wiskunde-natuurkunde.
Daarmee willen we laten zien hoe een concrete opgave een hulpmiddel kan zijn bij de discussie over vakinhoud, vakbegrippen en (vakdidactische) aanpak.

Voorbeeld 1

In dit voorbeeld (op pag. 276) .staan twee opgaven 'tegenover' elkaar. De eerste opgave is afkomstig uit de wiskunde, de tweede uit de natuurkunde, waarbij de wiskundige inhoud (het rekenen met machtsfuncties) van beide opgaven een grote overlap vertoont. De opgaven bieden ruimschoots de gelegenheid om de discussie tussen wiskunde- en natuurkundedocenten op een school te starten.
Vragen die daarbij aan elkaar kunnen worden gesteld, zijn bijvoorbeeld:

- Wat zijn overeenkomsten en verschillen tussen de (wiskundige) aanpak binnen de opgaven?
- Welke vakspecifieke begrippen herkennen we in beide opgaven?
- Waarom is het 'slim' om log r en log T tegen elkaar uit te zetten? Hoe pakt de natuurkundedocent zoiets aan in zijn les?
- Wat is het verband met een logaritmische schaalverdeling? Hoe wordt die bij beide vakken geïntroduceerd? En wat moeten de leerlingen er van weten?
- Welke wiskundige en/of natuurkundige voorkennis wordt er bij beide opgaven verondersteld?
- Wat kunnen beide 'vakken' van elkaar leren?
- Kan deze opgave gebruikt worden in het kader van afstemming tussen beide vakken?

Er zijn natuurlijk veel meer vragen te bedenken die een zinvolle, inhoudelijke discussie bevorderen en kunnen leiden tot meer begrip voor de verschillende manieren van aanpak. Gebruik maken van elkaars (vakdidactische) kennis bevordert uiteindelijk ook het inzicht bij de leerlingen.

Uiteraard zijn dergelijke discussies ook mogelijk tussen docenten wiskunde en de andere bètavakken en economie. Daarna, met de kennis over elkaars aanpak, kan in onderling overleg een substantieel aantal bèta- en economievoorbeelden uitgezocht worden die in de wiskundelessen aan de orde kunnen komen. En, wederzijds, zal in de genoemde vakken aangegeven moeten worden hoe daar de wiskunde wordt toegepast.
We geven hier (zie pag. 276 en 277) enkele voorbeelden, eigenlijk met de simpele vraag: Zou u een dergelijke opgave in uw wiskundeonderwijs kunnen gebruiken?

Voorbeeld 1 – Discussieopgave

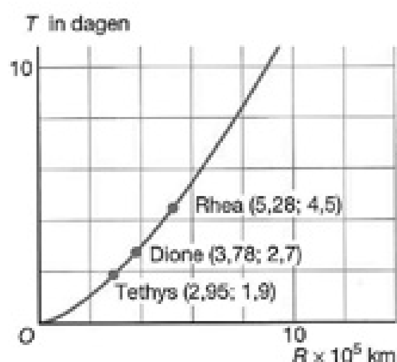
Wiskunde

Onderwerp: algebra, rekenen met machten

Bron: *Getal&Ruimte* (EPN), vwo B deel 1, p. 134.

Saturnus

De planeet Saturnus heeft vele manen. In de grafiek ***in figuur 1*** is voor drie manen het verband tussen de omloopstijd T in dagen en de straal R van de baan in 10^5 km af te lezen.



figuur 1

Sterrenkundigen hebben aangetoond dat $T = a \cdot R^{1,5}$.

a. Bereken a in twee decimalen nauwkeurig.

b. De baan van de maan Iapetus heeft een straal van $35,6 \cdot 10^5$ km. Hoeveel dagen is zijn omloopstijd?

c. In 1980 heeft de Voyager enkele tot dan toe onbekende manen van Saturnus gefotografeerd. Van een van deze manen, de 1980S.27, is de omloopstijd 15 uur. Bereken de straal van de baan.

d. De straal van de baan van de maan Titan is $\frac{25}{11}$ keer de straal van de baan van de maan Rhea. Hoeveel keer zo groot is de omloopstijd?

Natuurkunde

Onderwerp: mechanica, draaien, gravitatiewet

Bron: *Nieuwe Natuurkunde* (Stichting natuurkunde.nl), *zonnestelsel en heelal*

Omloopstijd

Volgens de derde wet van Kepler geldt voor de omloopstijd van een planeet dat:

$T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M}$, met:

- T : de omloopstijd van de planeet in s ;
- r : de afstand van de planeet tot de zon in m ;
- G : de gravitatieconstante, gelijk aan $6,67 \cdot 10^{-11}$ $N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}$;
- M : de massa van de zon, gelijk aan $1,989 \cdot 10^{30}$ kg.

Een rechte lijn kan verkregen worden door log r uit te zetten tegen log T.

1. Zoek in BINAS de tabel op met gegevens over planeten.
2. Maak een tabel waarin alle planeten voorkomen en zet hierin van elke planeet de omloopstijd (T) en de (gemiddelde) afstand tot de zon (r).
3. Vul de tabel aan met kolommen voor log r en log T.
4. Zet in een grafiek (op normaal ruitjespapier) log r uit tegen log T.
5. Stel een vergelijking op van de lijn.
6. Bereken met behulp van deze vergelijking én de grafiek de massa van de zon en vergelijk dit met bovenstaande waarde.
7. Zet vervolgens r uit tegen T op dubbellogaritmisch papier (bijgevoegd). Conclusie(s)?

Voorbeeld 2

In dit voorbeeld is sprake van een differentiaalvergelijking, zonder dit expliciet te noemen. Dat hoeft ook niet omdat het hier alleen gaat om het toepassen van wiskunde binnen een natuurkundige context. Het gaat dus formeel iets verder dan het wiskunde-B programma, maar laat wel aan leerlingen zien dat wiskundige begrippen en vaardigheden in het ho (in dit geval het werken met e-machten) belangrijk zijn.

Voorbeeld 2 – Radioactief verval

Bron: *Wiskunde voor het hoger onderwijs* (Noordhoff Uitgevers), deel 2, blz. 114.

De snelheid waarmee een radioactief element vervalt is op elk tijdstip evenredig met het nog aanwezige aantal niet vervallen radioactieve atomen. Van deze praktijksituatie onderzoeken we hier een voorbeeld.
We geven het aantal atomen dat op tijdstip t nog radioactief is, aan met $N(t)$ en we nemen als evenredigheidsconstante 0,002. Dan krijgen we de volgende vergelijking:

$$\frac{dN}{dt} = -0{,}002 \cdot N$$

Om na te gaan welke formule voor $N(t)$ voldoet aan deze vergelijking zijn verschillende methoden beschikbaar. Een daarvan is de volgende.

- Probeer voor $N(t)$ een formule van de vorm $N(t) = e^{k \cdot t}$.
- Invullen in de vergelijking levert op: $k \cdot e^{k \cdot t} = -0{,}002 \cdot e^{k \cdot t}$ en dus: $k = -0{,}002$.
- De formule $N(t) = e^{-0{,}002t}$ voldoet dus aan het genoemde probleem.

Maar er zijn veel meer oplossingen.

Ga zelf na dat voor elke waarde van B de formule $N(t) = B \cdot e^{-0{,}002t}$ ook een oplossing is.
Wanneer we ook nog weten hoeveel radioactieve atomen er zijn op het tijdstip $t = 0$, is daarmee de waarde van B vastgelegd, immers $N(0) = B \cdot e^0 = B$.

In het algemeen is er bij radioactief verval sprake van de vergelijking $\frac{dN}{dt} = -k \cdot N$ met als oplossing $N(t) = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}$.

Voorbeeld 3

De eerste twee voorbeelden hebben een natuurkundige context. Het derde voorbeeld is afkomstig uit een pilotexamen economie vwo en, gezien de inhoud, heel goed bruikbaar bij wiskunde A. De opgave roept ongetwijfeld vragen op bij wiskundedocenten, bijvoorbeeld over de invulling die economiedocenten in hun lessen geven aan begrippen als 'inflatie' , 'inkomensgroei' en 'welvaartsvast'. Dat biedt tegelijkertijd gelegenheid tot wederzijdse uitwisseling van een (vakdidactische) aanpak van dergelijke vragen.

Voorbeeld 3 – Pensioenwijzer

Bron: CSE Economie, pilot vwo 2010, 1e tijdvak

In het industriële bedrijf Amocco zijn de werknemers volgens de collectieve arbeidsovereenkomst (cao) van Amocco verplicht deel te nemen aan de bedrijfspensioenregeling. In deze bedrijfspensioenregeling worden de pensioenen gefinancierd volgens het kapitaaldekkingstelsel.
(…)
Een werkneemster van Amocco heeft een erfenis ontvangen en wil daarvan een bedrag rentedragend op de bank zetten. Dat bedrag moet zo groot zijn dat er bij haar pensionering over 35 jaar € 100.000 op de bank staat. Zij houdt rekening met een jaarlijkse inflatie van 2,1% en een jaarlijkse reële inkomensgroei van 1,9%. Ze vindt een bank die een rente geeft die precies hoog genoeg is om haar spaargeld gedurende die 35 jaar welvaartsvast te houden. De werkneemster moet dan € 25.341,55 op de bank zetten. Stel echter dat de bank na precies 10 jaar de rente vaststelt op 3% voor de rest van de looptijd.

3. Bereken het bedrag dat de werkneemster na 10 jaar moet bijstorten om bij haar pensionering € 100.000 op de bank te hebben staan.

Correctiemodel uit het cv

3. Een voorbeeld van een juiste berekening is:

- rente eerste 10 jaar: 1,021 × 1,019 = 1,0404 → 4%
  beschikbaar over 10 jaar: € 25.341,55 · $1{,}04^{10}$ = € 37.511,68
- benodigd bedrag over 10 jaar: $\frac{100.000}{1{,}03^{25}}$ = € 47.760,56
- bijstorten € 47.760,56 – € 37.511,68 = € 10.248,88

Tot slot

Over 'longitudinale' afstemming van de momenten in de roosters waarop relevante vakinhouden aan de orde komen, is tijdens onze schoolbezoeken veel gezegd. De vraag werd opgeworpen of het altijd strikt noodzakelijk is en of verschuiving in de behandelingsvolgorde mogelijk en gewenst is. Ervaring in het hoger onderwijs leert dat het een utopie is om behandelingsvolgorden te realiseren die een naadloze vakkenaansluiting garanderen. Voorbeelden en toepassingen mogen ook best (juist?) wat uit fase liggen in de afzonderlijke vakken. Leerlingen begrijpen dat. En als het wel kan, dan gewoon doen. Zo merkte een van de docenten, die wist dat het begrip *afgeleide* te laat komt voor gebruik in de mechanica, op: 'Dan behandelen we mechanica dus wat later.'
Deze vormen van afstemming in lessituaties kunnen enerzijds als vliegwiel fungeren voor de genoemde afstemmingsactiviteiten binnen en buiten de les (zie onder de paragraaf 'Aan de slag op school'), anderzijds worden de afstemming en de verdere activiteiten tevens gestimuleerd door een of meerdere van de daar genoemde algemenere ondersteuningsactiviteiten.

Ondersteuning

De handreiking 'Samenhang en afstemming tussen wiskunde en de profielvakken' [3] biedt een aantal handvatten om op de eigen school aan de slag te gaan. We werken nog aan een aanvulling voor natuurkunde en een aantal voorbeeldopgaven uit scheikunde en biologie. Via de aangegeven website komen deze documenten beschikbaar. Daarnaast bestaat de mogelijkheid om een overleg te voeren met (een van) de samenstellers van dit artikel over het opzetten van afstemmingsactiviteiten of -projecten binnen de eigen schoolomgeving.

Noten en literatuur

[1] cTWO (2012): *Denken & doen / wiskunde op havo en vwo per 2015.* Utrecht: cTWO. Eindadvies aan het ministerie van OCW; december 2012.

[2] *Implementatieplan nieuwe wiskunde/ examenprogramma's.* Enschede: SLO (november 2012).

[3] N. Alink, R. van Asselt, N. den Braber (2012): *Samenhang en afstemming tussen wiskunde en de profielvakken.* Enschede: SLO. Handreiking met voorbeeldmateriaal (mei 2012). Te downloaden via: *www.slo.nl/downloads/2012/*

[4] R. van Asselt (2007): *Doorstroom in onderwijs en de betekenis van een goede aansluiting.*. Enschede: Saxion Hogescholen (Lectoraat IMA); oktober 2007.

[5] R. van Asselt (2012): *Wiskunde in het technisch beroepenveld / Verslag van een onderzoek naar de gewenste wiskundekennis en -vaardigheden van hbo-afgestudeerden in het technisch beroepenveld.* Landelijke werkgroep HBO-wiskunde (LWHW) van de NVvW (juni 2012).

[6] *SALVO-project, afstemming wiskunde-bètavakken en -economie in onderbouw en tweede fase.* Informatie: *www.fisme.science.uu.nl/salvo/*

Over de auteurs

Roel van Asselt is oud-lector Instroommanagement en Aansluiting van Saxion Hogescholen, en was oprichter/directeur van het LICA. Thans is hij zelfstandig onderwijsadviseur en vervult hij een aantal bestuurs- en adviesfuncties in het hoger en voortgezet onderwijs, waaronder het lidmaatschap van de vernieuwingscommissie wiskunde vo (cTWO).
E-mailadres: *r.v.asselt@ziggo.nl*
Nico Alink is ruim 40 jaar werkzaam geweest in het vo als docent wiskunde. Momenteel werkt hij bij de SLO aan diverse projecten die betrekking hebben op de invoering van de vernieuwde wiskundeprogramma's in 2015.
E-mailadres: *n.alink@slo.nl*

Erratum 88-5

Tijdens de productie van nummer 88-5 is op pagina 250 iets mis gegaan. Enkele tekstregels in de linker en de middelste kolom (de opgaven) staan daardoor niet op de juiste plaats.
Mede namens de producent biedt de redactie daarvoor excuses aan, in de eerst plaats aan de auteur, Yvonne Killian, en natuurlijk ook aan de lezers.
In een PDF-bestand (ca. 760 kB) op de NVvW-website staan de bedoelde regels wél op de goede plaats.
Zie:
www.nvvw.nl/media/files/euclides/erratum(885).pdf

MEDEDELING /

OP DE WEBSITE

Rekenbeleid op school
Ervaringen van het Montessori Lyceum Rotterdam

Op het Montessori Lyceum Rotterdam zijn docenten en schoolleiding voortvarend aan de slag gegaan om hun rekenbeleid vorm te geven. Er is een rekencommissie opgezet, die een plan heeft gemaakt om leerlingen zo goed mogelijk voor te bereiden op de rekentoets, te beginnen met de pilottoets van maart 2013.
Op de NVvW-website vindt u een artikel van Marjan Botke en Michiel Peerenboom, waarin zij beschrijven hoe de school te werk is gegaan, tegen welke hobbels ze aan gelopen zijn en hoe ze de komende tijd nog verder gaan.
Een interessant kijkje in de keuken, wat u wellicht op uw eigen school nog kunt gebruiken bij het verder ontwikkelen van het rekenbeleid.

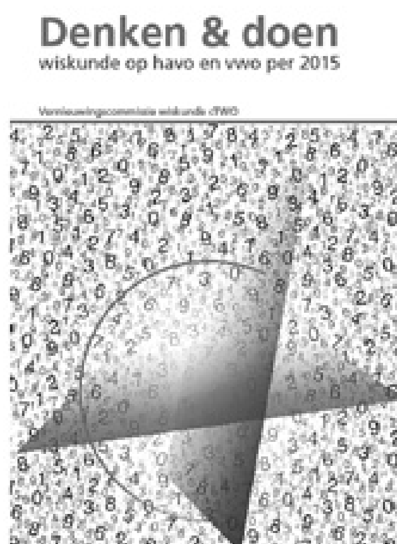
U kunt het artikel (PDF-formaat, ca. 70 kB) vinden op:
www.nvvw.nl/media/downloads/eucl(886)rekenbeleid.pdf

Denken & doen

OVER HET EINDRAPPORT VAN cTWO

[Theo van den Bogaart]

De afgelopen tien jaar hield de Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs, cTWO, zich bezig met het toekomstige wiskundeonderwijs op havo en vwo. In januari heeft ze haar eindrapport, getiteld Denken & doen, aangeboden aan de staatssecretaris. Dit rapport bevat allereerst voorstellen voor vernieuwde examenprogramma's per 2015, beginnend in klas 4. Deze programma's zijn uitgetest in een pilot op diverse scholen verspreid over Nederland. Daarnaast bevat het rapport adviezen van algemenere aard over de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs.



De inleiding van *Denken & doen,* het eindrapport van cTWO, bevat vijftien algemene conclusies en tien aanbevelingen. Daarna volgt een hoofdstuk gewijd aan de overkoepelende visie, waarna de verschillende wiskundevakken de revue passeren. Voorafgaand aan een serie bijlagen is er nog een hoofdstuk over doorlopende leerlijnen. Het is ondoenlijk om in dit artikel alle 251 bladzijden te bespreken. Daarom is een selectie gemaakt van punten die voor wiskundedocenten het meest relevant zijn. Het volledige rapport is beschikbaar op de website van cTWO (*www.ctwo.nl* onder 'publicaties'). Ook krijgen alle scholen binnenkort een ingekorte versie van het rapport toegestuurd; hierin zijn ook de volledige examenprogramma's te vinden.

Het is handig om de verschillende wiskundevakken havo en vwo gelijktijdig te behandelen, omdat vaak dezelfde kwesties spelen. Dat betekent niet dat in het examenprogramma het zogenoemde theezakjesmodel is gehanteerd. Zoals duidelijk zal worden, zijn er tussen de havo- en vwo-programma's bij alle vakken wezenlijke verschillen.

De rode draad
Eén van de eerste wapenfeiten van cTWO was het formuleren van een visie. Deze vormt de basis voor de verschillende examenprogramma's. Over het visie-document heeft eerder een artikel in *Euclides* gestaan.[1] Een belangrijk onderdeel van de visie zijn *wiskundige denkactiviteiten*. Deze vormen de rode draad door alle vernieuwde programma's. Het gaat hier om de balans tussen procedurele en conceptuele kennis. Over denkactiviteiten is al op diverse plekken gerapporteerd [2], zoals in de plenaire lezing van Drijvers en Van Wijk op de NVvW-studiedag van 2011.
Een weerbarstig onderwerp waarbij een aantal belangrijke stappen is gezet, is samenhang tussen bètavakken. We noemen hier de samenwerking tussen de diverse vakvernieuwingscommissies en de recent gepubliceerde handreiking [3], waarin concrete voorbeelden worden gegeven van de afstemming van wiskunde en vakken als natuurkunde en economie.
Twee belangrijke standpunten van cTWO die in de pilot nog niet de gewenste aandacht hebben gekregen, betreffen het kritisch gebruik van contexten en ICT. Dat betekent niet dat hier niets mee is gebeurd, want het krijgt aandacht in de examenprogramma's en -opgaven. Bij het onderwerp statistiek zal ICT een belangrijkere rol spelen dan nu het geval is.

Wiskunde C: toegesneden op C&M
Wiskunde C op vwo verandert het meest radicaal. Op dit moment is het vak een aftreksel van wiskunde A. In het vernieuwde programma zijn onderdelen als vorm en ruimte en logisch redeneren opgenomen en bovendien nemen contexten die passen bij het profiel Cultuur en Maatschappij, zoals schilderijen en architectuur bij vorm en ruimte en krantenartikelen of taalwetenschappen bij logisch redeneren, een belangrijke plaats in. De nadruk ligt minder op reproduceren van technieken, maar meer op de functie, de cultuurhistorische rol en de waarde van wiskunde in onze samenleving. Daarmee wordt wiskunde C een vak dat aansluit bij de belangstelling en mogelijkheden van een, vanuit het oogpunt van wiskundeonderwijs, kwetsbare groep leerlingen. Pilotdocenten zijn enthousiast over het programma en geven aan dat leerlingen nu beter tot hun recht komen dan voorheen.
Ook voor havo heeft het ministerie plannen om wiskunde C in te voeren. Ook hiermee is cTWO belast, maar gezien de afwijkende aard van deze opdracht is hierover apart verslag gedaan.[4]

Wiskunde A: statistiek
De belangrijkste wijziging die in het A-programma van zowel havo als vwo (en trouwens ook bij wiskunde C) optreedt, betreft het onderwerp kansrekening en statistiek. Doel is dit beter aan te laten sluiten bij de wijze waarop het onderwerp in de vervolgopleidingen wordt aangeboden. Daarom spelen de empirische cyclus en het analyseren van grote datasets met ICT een grote rol.
De empirische onderzoekscyclus en het gebruik van computers zijn om praktische redenen lastig te toetsen op het centraal examen. Daarom is in de pilot ervoor gekozen dit onderdeel enkel op het schoolexamen te toetsen. Vooral bij havo oordeelden pilotdocenten hier kritisch over, omdat ze vreesden dat statistiek in de marge zou geraken door het belang dat

aan het centraal examen wordt gehecht. Op het havo is daarom in de uiteindelijke voorstellen wel een gedeelte van de statistiek als CE-onderdeel opgenomen.
Het toewijzen van onderwerpen aan het schoolexamen past trouwens bij het zogenoemde 60/40-beleid van het ministerie, dat zegt dat ongeveer 40% van de stof enkel op het schoolexamen getoetst wordt. Zo krijgen docenten de mogelijkheid om duidelijker eigen accenten te leggen. cTWO constateert echter dat dit beleid op gespannen voet staat met actuele ontwikkelingen: diverse partijen hechten steeds meer belang aan het CE-cijfer en bovendien moeten de cijfers van SE en CE van de inspectie dicht bij elkaar liggen.
Statistiek op grote datasets, en met name het vormgeven van een onderzoeksopdracht, zijn nieuw in de stof van het voortgezet onderwijs. Mede daardoor is de uitwerking hiervan in de pilot nog niet volledig gelukt. Dit is een ontwikkeling die de komende jaren moet worden voortgezet en cTWO benadrukt in het rapport het belang van de ontwikkeling van voorbeeldopgaven en scholing.

Wiskunde B: meetkunde

In wiskunde B is de duidelijkste wijziging zichtbaar bij meetkunde. Er treedt een verschuiving op richting analytische meetkunde. Hierdoor worden de programma's samenhangender, omdat analytische meetkunde nu eenmaal meer overeenkomsten vertoont met analyse; en daardoor is er ook automatisch meer aandacht voor algebraïsche vaardigheden – waarin overigens bij de laatste programma-wijziging in 2007 al een flinke verbeterslag is gemaakt.
Op het vwo maakt de zuivere 'bewijsmeetkunde' plaats voor meetkunde met coördinaten en vectoren, waarbij lokaal nog steeds geredeneerd wordt met methoden uit zowel de synthetische als analytische meetkunde. Parametervoorstellingen, gebruikt voor het beschrijven van beweging, zijn opgenomen in het meetkundedomein. In de analyse zijn het limietconcept en inverse functies terug van weggeweest.
Bij havo zijn de ontwikkelingen ingewikkelder. Wiskunde B op havo heeft het meest te lijden gehad onder de urenreductie uit 2007. Dat leidde tot problemen bij het huidige programma [5] en aanvankelijk was ook het pilotprogramma van cTWO sterk overladen. In samenspraak met de pilotdocenten is besloten tot een drastische ingreep. Zo zijn de differentieerregels beperkt en is het onderwerp vectoren geheel geschrapt. Liever ziet cTWO echter een uitbreiding van de studielast. Het nieuwe onderwerp evenredigheden is overigens wel behouden.
cTWO constateert rond wiskunde B havo nog meer zorgpunten. Door de zak/slaagregeling is de vrees dat leerlingen eerder voor het veiliger wiskunde A kiezen, waardoor wiskunde B in de marge raakt. Wat daarbij niet helpt is dat wiskunde B voor vrijwel geen enkele hbo-opleiding een toelatingseis is, terwijl de kennis uit wiskunde B wel degelijk nodig is in de opleiding. cTWO roept de staatssecretaris en de vervolgopleidingen op om realistische ingangseisen te stellen.

Wiskunde D: samenwerking

Bij wiskunde D verandert allereerst een aantal zaken vanwege de afstemming op wiskunde B. Ruimtemeetkunde bij havo en synthetische meetkunde bij vwo verhuizen naar wiskunde D en bij havo verdwijnt de toegepaste analyse omdat dit voortbouwde op onderwerpen die pas in de loop van de vijfde klas bij wiskunde B aan bod komen. Een andere aanpassing is het opheffen van het onderscheid tussen het schoolmodel en het samenwerkingsmodel. Deze modellen bleken in de praktijk namelijk niet op de beoogde manier te functioneren. De domeinen *Wiskunde in technologie* op havo en *Wiskunde in wetenschap* op vwo zijn nu voor iedereen verplicht. Dit kan worden gedaan, omdat inmiddels is gebleken dat samenwerking met vervolgopleidingen succesvol kan worden vormgegeven.
Tot slot stelt cTWO dat de positie van wiskunde D moet worden verstevigd, opdat de verbreding, de verdieping, de gelegenheid tot talentontwikkeling en de grondigere voorbereiding op de vervolgopleiding die het vak biedt, behouden blijven.

Onderbouw

Tot de opdracht van cTWO behoorde ook het nadenken over doorlopende leerlijnen. Voor de onderbouw heeft dit gestalte gekregen in een apart project.[6] cTWO constateerde dat er sinds de invoering van de basisvorming in 1993 een erosie heeft plaatsgevonden in de inhoud van het vak wiskunde in de onderbouw. In het kader van de zogenaamde revitalisering van de onderbouw is, gezamenlijk met de SLO, een document opgesteld met tussendoelen [7] die de kennis en vaardigheden beschrijven die leerlingen aan het einde van de derde klas van havo en vwo moeten hebben om de onderbouw goed af te ronden en soepel te kunnen instromen in de bovenbouw. Deze tussendoelen zijn concreet uitgewerkt in 150 opgaven die voor iedereen digitaal beschikbaar zijn in een opgavenbank.[8]
Het ministerie overweegt momenteel om tussentijdse diagnostische toetsen af te nemen in klas 3. Hoewel de tussendoelen niet met dit doel zijn geformuleerd, vormen ze hiervoor wel een basis.
Tussendoelen, algebraïsche vaardigheden, denkactiviteiten – dit vraagt om een stevig aantal contacturen in de onderbouw. Het aantal uren is de laatste jaren echter gedaald en door de ontwikkelingen rondom rekenen komt het nog verder onder druk te staan. cTWO vindt dat er 'als vanouds' gestreefd moet worden naar een lesuurverdeling 4-4-4 in klas 1 tot en met 3 en *niet* 4-3-3 zoals die momenteel vaak gehanteerd wordt.

De blik verbreed

Tot slot doet cTWO twee aanbevelingen van wat algemenere aard. In de eerste aanbeveling wordt kritisch naar het proces van de afgelopen tien jaar gekeken. De conclusie is dat een incidentele, grootschalige vernieuwing misschien niet de beste manier is om onderwijs te ontwikkelen. cTWO beveelt daarom aan een **permanente curriculumcommissie** in te stellen die rustiger en geleidelijker veranderingen doorvoert.
Een spraakmakende aanbeveling, die inmiddels ook al door de NVvW is verwoord, betreft de toedeling van de wiskundevakken aan de profielen.
In de huidige profielstructuur moet wiskunde A onderling sterk verschillende profielen bedienen en dan leidt ertoe dat het niet goed is gelukt een wiskunde A-programma te maken dat past bij alle doelgroepen. Wiskunde C en wiskunde D zijn vakken met veelal kleine leerlingaantallen. Wiskunde die voorbereidt op technische en bètastudies, dreigt minder gekozen te gaan worden dan voorheen, onder andere wegens de verscherpte slaagnormen en het feit dat leerlingen en scholen ervoor kunnen kiezen in de natuurprofielen slechts een lichte of beperkte variant van wiskunde op te nemen. Daarom beveelt cTWO een herbezinning aan: overweeg op termijn de invoering van twee robuuste wiskundevakken, **wiskunde** α voor de maatschappijprofielen en **wiskunde** β voor de natuurprofielen, door wiskunde A en C respectievelijk B en D samen te voegen in vakken met een kerncurriculum en een bescheiden differentiatie.

En nu?

De beoogde invoering van de nieuwe programma's vindt plaats in het schooljaar 2015/2016, beginnend in klas 4. Op dat moment zijn nieuwe edities van de schoolboeken beschikbaar. Anders dan bij de laatste herziening is er al ervaring opgedaan en is er al een flinke collectie op pilotscholen beproefde examens. Op studiedagen is de afgelopen tijd al uitgebreid aandacht besteed aan de ontwikkelingen en dat zal de komende tijd doorgaan. En op dit moment wordt ook een scholingsprogramma opgezet.

De SLO is verantwoordelijk voor het invoeringstraject tot en met het eerste vwo-examen in mei 2018.
Het is nu al mogelijk concreet materiaal in te zien. Via de cTWO-website kan het lesmateriaal worden bekeken dat in de pilot wordt gebruikt en op de site van het Cito staan de officiële pilotexamens die tot nu toe zijn afgenomen.



foto 1 cTWO-voorzitter Dirk Siersma (links) biedt aan André de Jong, directeur-generaal primair en voortgezet onderwijs, het eindrapport aan (foto: Paul Drijvers)

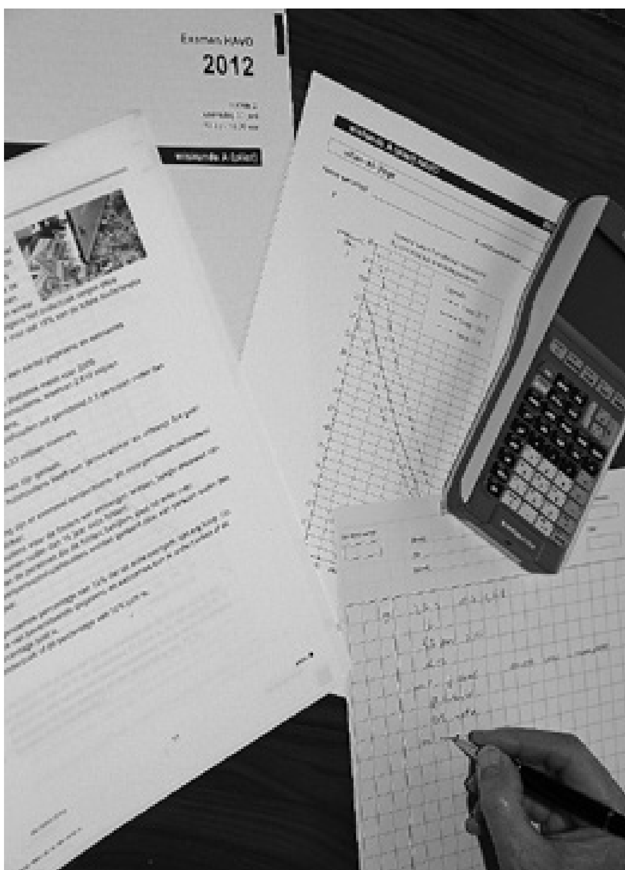


foto 2 Het pilotexamen havo A 2012 op een tafel met grafische rekenmachine

Noten

[1] D. Siersma, P. Drijvers (2007): *Rijk aan betekenis, het visiedocument van cTWO in vogelvlucht*. In: *Euclides* 82(5); pp. 169-172.

[2] P. Drijvers (2011): *Wat bedoelen ze toch met... denkactiviteiten*. In: *Nieuwe Wiskrant* 31(2); pp. 38-41. Te vinden op: *www.fisme.science.uu.nl/wiskrant/artikelen/312/312december_drijvers.pdf*

[3] N. Alink, R. van Asselt, N. den Braber (2012): *Samenhang en afstemming tussen wiskunde en de profielvakken*. Als PDF-bestand te vinden op: *www.slo.nl/downloads/2012/*
Zie ook het artikel 'Samenhang en afstemming' in dit nummer; pp. 274-278.

[4] cTWO (2012): *Voorstel examenprogramma Wiskunde C havo 2015*. Als PDF-bestand te vinden op *www.ctwo.nl* onder 'publicaties'.

[5] Zie bijvoorbeeld de enquête in de *WiskundE-brief* van mei 2009 (nr. 496; *Enquête contacttijd*), en de artikelen in *Euclides* 86(1) en 87(1) van Hielke Peereboom over de centrale examens havo B.

[6] D. de Haan, L. Spijkerboer (2012/13): *Tussendoelen havo/vwo-3*. In: *Euclides* 88(3), pp. 136-138; in: *Euclides* 88(4), pp. 169-172.

[7] M. Bos, N. den Braber, J. Gademan, P. van Wijk (2010): *Overzicht tussendoelen wiskunde havo en vwo*. Als PDF-bestand te vinden op *www.ctwo.nl* onder 'publicaties'.

[8] D. de Haan, H. Eigeman, e.a. (2012): *Databank met opgaven bij de cTWO-tussendoelen*. Te vinden op *www.ctwo.nl* onder 'onderbouw'. Zie ook [6].

Over de auteur

Theo van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool Utrecht. Daarnaast werkte hij tot afgelopen jaar voor cTWO als secretaris en als lid van het projectteam.
E-mailadres: *theo.vandenbogaart@hu.nl*



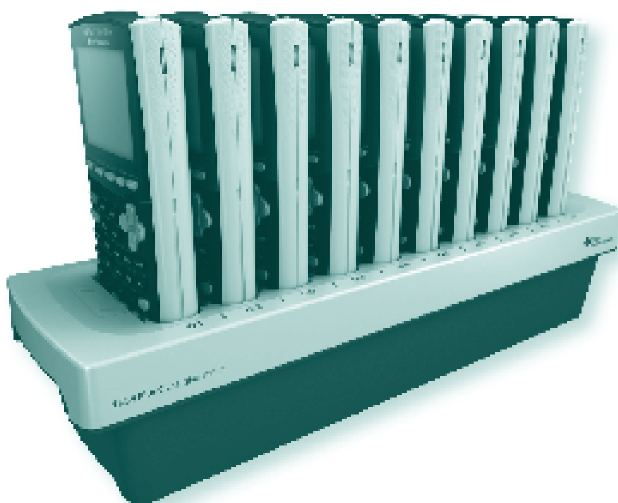
De nieuwe

TI-84 Plus C *Silver Edition*

Is nu beschikbaar!

Bestel 'm vast!

- Goedgekeurd door CVE voor Centraal Eindexamen
- Met backlit kleurenscherm
- Met oplaadbare batterij
- Met lader
- Functioneel hetzelfde als TI-84 Plus
- Met Examenstand/Geheugen-blokkering
- Ook weer met TI-SmartView, maar nu met kleur! (vanaf juni)
- Gratis upgrade huidige zwart-wit SmartView software mogelijk



Laadstation, ook handig voor opbergen

Zeer aantrekkelijke lerarenaanbieding
Kennismakingsaanbieding voor docenten voor **€ 69**! Met gratis TI-SmartView kleurensoftware. En tevens gratis, ter kennismaking: TI-Nspire software, het vlaggenschip voor de wiskundeles.

Mail voor aanbieding en/of meer informatie naar educatief consulent Jurgen Schepers j-schepers@ti.com .

Kijk ook op **www.edcuation.ti.com/nederland**

Texas Instruments

Uw Expertise. Onze Technologie. Succes voor de Leerling.

Vormgeven van rekenen in het vo

[Martin van Reeuwijk, Susanne Spiele, Madeleine Vliegenthart, Peter van Wijk]

Inleiding
Nu de referentieniveaus rekenen en taal zijn ingevoerd, zijn vo-scholen vormen aan het ontwikkelen om rekenen meer aandacht te geven om zo de leerlingen op het gewenste (referentie)niveau te krijgen en te houden. Rekenen is in het vo geen officieel zelfstandig vak; er zijn geen structurele middelen (geld) om rekenuren en rekendocenten te financieren. Het is aan de school om te kiezen of en hoe rekenen een plek krijgt binnen de school. De school kan daarvoor de gelden uit de prestatiebox inzetten.
Deze vrijheid is een verklaring voor de grote variëteit tussen vo-scholen in hoe ze het rekenen een plek geven in het onderwijs. Er zijn verschillende modellen voor de inrichting en vormgeving van rekenen en rekenonderwijs in het vo. Sommige scholen kiezen voor extra uren rekenen voor een select groepje leerlingen, andere scholen hebben rekenen schoolbreed een plek gegeven en er zijn scholen die niets extra's aan rekenen doen (bijvoorbeeld omdat de noodzaak er niet is, men er het nut niet van inziet of de middelen ontbreken).

Hoe organiseer je het?

	Periode 1	Periode 2	Periode 3	Periode 4
Model 1	Rekentoets afnemen bij wiskunde	Remediërend Klein groep verplicht	Remediërend Klein groep verplicht	Remediërend Klein groep verplicht
Model 2	Rekentoets afnemen bij wiskunde, extra uur	Extra uur	Extra uur	Extra uur Rekentoets
Model 3	Extra aandacht bij mentoraat	Extra aandacht bij wiskunde	Extra aandacht bij aardrijkskunde	Extra aandacht bij biologie
Model 4	Rekentoets Advies	Vrijwillig	Vrijwillig	Vrijwillig Rekentoets

figuur 1 Vier modellen om het rekenen in de brugklas vorm te geven (gebaseerd op een inventarisatie gedaan in regionale rekennetwerken van vo-scholen, uitgevoerd door APS in 2010 en 2011)

Op verzoek van het ministerie van OCW heeft het APS in samenwerking met DUO Onderwijsonderzoek in kaart gebracht hoe vo-scholen rekenen en rekenonderwijs hebben vormgegeven en georganiseerd, en welke materialen en personen ze daarvoor inzetten. Daarnaast is onderzocht welke kosten bij de verschillende vormen komen kijken en welke resultaten de verschillende modellen opleveren.
In dit artikel beschrijven we de resultaten van de eerste analyse van de resultaten van het onderzoek.

Opzet van het onderzoek
In het onderzoek is middels een digitale vragenlijst informatie verzameld over de volgende onderwerpen:
- de visie op (reken)onderwijs in het voortgezet onderwijs;
- het rekenbeleid;
- de invulling en uitvoering van rekenlessen en de samenwerking binnen en buiten de school;
- omgaan met (niveau)verschillen tussen leerlingen;
- de kosten van extra leermiddelen, toetsen en de inrichting van het rekenbeleid.

Om informatie te verzamelen over de bovenstaande onderwerpen is door het APS in samenwerking met DUO Onderwijsonderzoek een vragenlijst ontwikkeld. Deze is eerst getest bij een vijftal schoolleiders en rekencoördinatoren en vervolgens gereviseerd. Dit resulteerde in een vragenlijst met 70 gesloten vragen en 4 open vragen.

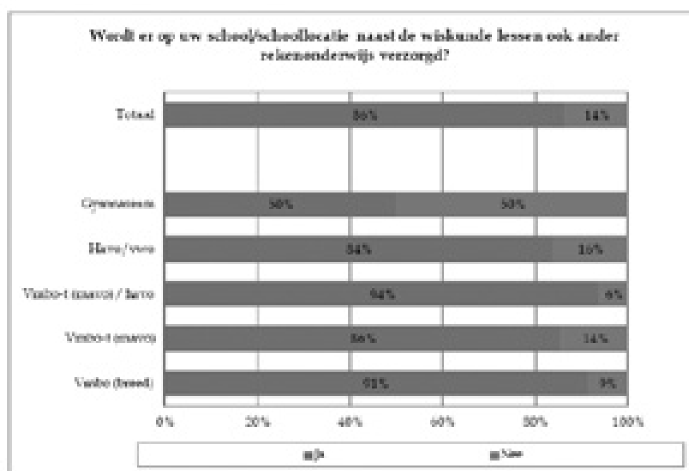
	onderzoeksgroepen	steekproef
1	vmbo-breed	102
2	mavo (vmbo-T)	28
3	mavo (vmbo-T)/havo	33
4	havo/vwo	130
5	gymnasium	10
	totaal	303

figuur 2 Onderzoeksgroepen en gerealiseerde steekproef

De vragenlijst is online afgenomen. De afname heeft plaatsgevonden tussen september en oktober 2012. In totaal hebben 303 unieke scholen of schoollocaties een volledige vragenlijst ingevuld. Dit op een totaal van 1300 locaties geeft voldoende betrouwbaarheid van de resultaten.

Resultaten
Visies op het onderwijs
Een ruime meerderheid van de respondenten (86%) geeft aan dat de school een door de docenten breed gedragen visie heeft op het onderwijs. Slechts een relatief kleine groep (36%) is echter van mening dat er op hun school sprake is van een breed gedragen visie op rekenen. Hierbij is het gymnasium het meest negatief; slechts 10% ziet een breed gedragen visie op rekenen. Het meest optimistisch hierover is het vmbo (breed) met 48%.
Over het bestaan van de referentieniveaus zijn over alle niveaus de meeste docenten geïnformeerd: gemiddeld 79%.

Rekenbeleid
42% van de scholen heeft een beleidsplan voor rekenen; 51% is hier nog mee bezig.
Bij drie kwart van de scholen (78%) is een rekencoördinator betrokken bij het opstellen van het beleid voor rekenonderwijs;
bij twee derde van de scholen is daarbij een schoolleider betrokken. Ook betrekken sommige scholen hierbij een werkgroep van docenten wiskunde/rekenen (38%) of een werkgroep met docenten van verschillende vakken (28%).
Rekenwerkgroepen komen gemiddeld zeven keer per jaar bij elkaar om overleg te plegen over beleid voor het rekenonderwijs.
Op het grootste deel van de scholen (86%) wordt naast het wiskundeonderwijs ook ander rekenonderwijs aangeboden, voornamelijk extra rekenlessen en extra ondersteuning. Rekenen als onderdeel van andere lessen komt minder aan bod. Het vmbo-T/havo is bij het aanbieden van extra rekenen een uitschieter met 94%.



figuur 3

Over de inhoudelijke kennis van de rekencoördinator is het grootste deel van de respondenten (77%) tevreden; 66% is daarnaast ook te spreken over de didactische kwaliteiten van de rekencoördinator. Een deel van de rekencoördinatoren zou zelf nog wel inhoudelijke bij- of nascholing wensen (42%) en didactische bij- of nascholing wordt zelfs door het grootste deel gewenst (61%).

Hoewel ongeveer de helft van de respondenten van mening is dat de rekendocenten op zijn of haar school voldoende kennis hebben (49%), blijkt er ook een groot deel dat vindt dat de rekendocenten niet op elk vlak voldoende kennis hebben. Op de vmbo(-T)- en havo-afdelingen ligt het percentage met deze mening zelfs rond de 50%. Ook over de didactische kennis van de rekendocenten op deze afdelingen is 60% van de respondenten niet geheel tevreden.



figuur 4

Op een ruime meerderheid van de scholen (84%) worden de leerlingresultaten geregistreerd. Op de meeste scholen wordt hiervoor een leerlingvolgsysteem zoals Magister of SOM gebruikt (35%), direct gevolgd door het Cito Volgsysteem/VAS (31%).

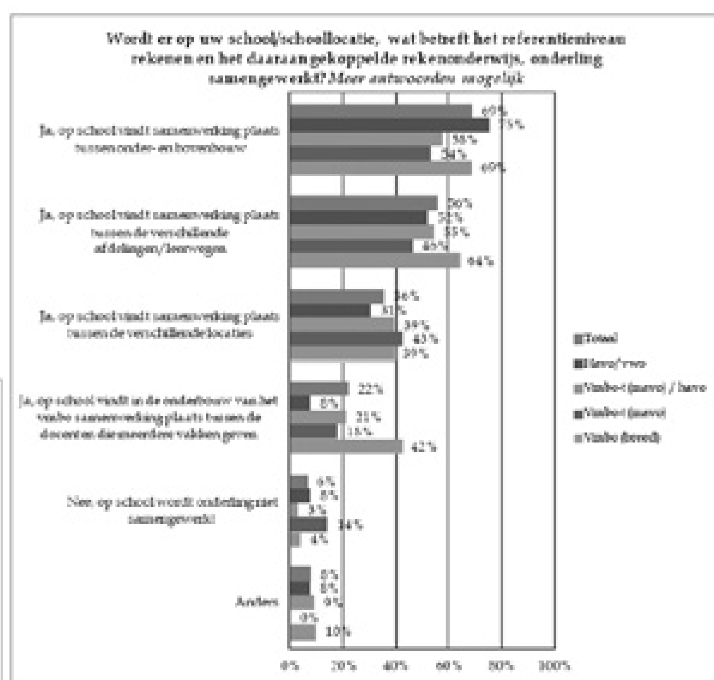
De systematisch geregistreerde leerlingenresultaten worden vooral gebruikt om resultaten naar de leerlingen terug te koppelen (84%), resultaten naar de ouders terug te koppelen (75%) of om het bestaande rekenonderwijs te verbeteren (72%).

Op slechts een kwart van de scholen (26%) worden de resultaten uit het leerlingvolgsysteem gebruikt om de leerlingen in de onderbouw in te delen naar klassen of groepjes van gelijk niveau.

Samenwerking

Vrijwel alle respondenten (94%) geven aan dat er op hun school of schoollocatie onderling wordt samengewerkt wat betreft de referentieniveaus rekenen en het daaraan gekoppelde rekenonderwijs. Deze samenwerking vindt meestal plaats tussen de onderbouw en de bovenbouw (69%) of tussen de verschillende afdelingen of leerwegen.

Samenwerking tussen verschillende locaties komt minder voor (36%). Op 6% van de scholen wordt niet onderling samengewerkt.



figuur 5

De meeste scholen (71%) werken volgens de respondenten niet samen met andere scholen. De 29% die dat wel doet, gaat bijvoorbeeld bij elkaar op bezoek, bezoekt gezamenlijk conferenties of wisselt toetsen of gegevens uit.

De praktische uitvoering van het rekenbeleid

Gemiddeld is een rekencoördinator benoemd voor 62 klokuren per jaar. Hij

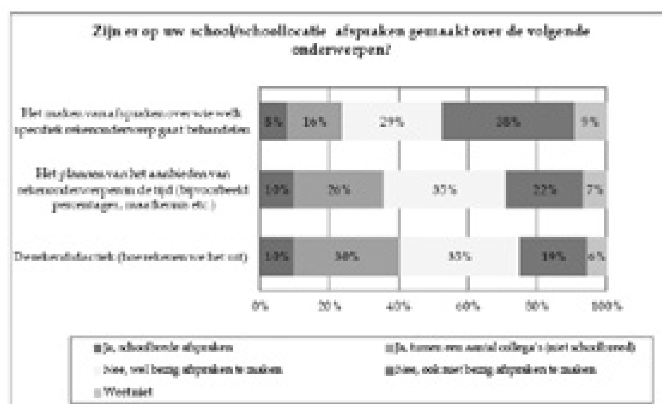
of zij besteedt gemiddeld 9 klokuren per week aan het coördineren van het rekenonderwijs. Hieronder valt bijvoorbeeld communicatie met de directie over rekenen (94%), het bijhouden van de ontwikkelingen op rekengebied (88%) en het communiceren over rekenen met de overige medewerkers van de school (85%). Het minst vaak noemen de respondenten het organiseren van de scholing/ professionalisering van docenten (35%).

Invulling van rekenlessen in het rooster
Op circa de helft van de scholen (49%) zijn voor alle leerlingen aparte rekenlessen in de lessentabel opgenomen, hoewel dit op het vmbo (breed) relatief vaker gebeurt (75%). Een vijfde van de scholen geeft alleen aparte rekenlessen aan rekenzwakke leerlingen en leerlingen die geen wiskunde hebben. Een derde (31%) van de scholen heeft geen aparte rekenlessen in de lessentabel opgenomen (vooral op het gymnasium). Het aantal uren dat wordt gegeven aan alle leerlingen varieert tussen de verschillende afdelingen tussen de 6 en de 20 per jaar waarbij de meeste uren worden besteed in leerjaar 1 van vmbo-T. Rekenzwakke leerlingen krijgen tussen de 0,5 en 14 uur; ook hierbij delen vmbo-T afdelingen de meeste uren in.
Op een ruime meerderheid van de scholen (93%) is er geen docent aangesteld om alleen les te geven in rekenen.

	Leerjaar 1 (gemiddeld aantal uren)	Leerjaar 2 (gemiddeld aantal uren)	Leerjaar 3 (gemiddeld aantal uren)	Leerjaar 4 (gemiddeld aantal uren)	Leerjaar 5 (gemiddeld aantal uren)	Leerjaar 6 (gemiddeld aantal uren)
Vmbo breed						
Lwoo	14,5	12,9	10,3	5,4	—	—
Basis	11,6	10,4	10,6	9,3	—	—
Kader	11,6	11,1	10,3	9,4	—	—
Gemengd	10,1	10,0	9,3	5,7	—	—
Theoretisch	12,1	11,0	9,8	6,3	—	—
Mavo(Vmbo-t)	20,4	20,4	15,8	7,1	—	—
Mavo/Havo:						
Mavo	13,8	12,0	11,1	11,9	—	—
Havo	9,4	7,9	9,7	11,4	11,0	—
Havo/Vwo:						
Havo	12,1	8,8	10,1	9,5	8,9	—
Vwo	10,8	7,7	9,0	5,7	9,0	6,2
Gymnasium (n=1)	7,0	5,0	0,0	0,0	0,0	0,0

figuur 6

Iets meer dan de helft van de respondenten (58%) geeft aan dat er een vast uur is voor aparte rekenlessen. De twee meest genoemde doelen hiervan zijn het oefenen van kennis en vaardigheden (85%) en het voorbereiden op de rekentoets (83%).
Van de respondenten geeft 41% aan dat er naast de aparte rekenlessen ook in andere lessen aandacht wordt besteed aan rekenen. Dit gebeurt het meest bij de vakken economie (84%), wiskunde (79%) en natuurkunde/scheikunde (53%).
Op de school of schoollocatie van 75% van de respondenten zijn afspraken gemaakt over de rekendidactiek (40%) of is men hiermee bezig (35%). Meestal is nog niet afgesproken wie welk specifiek onderwerp gaat behandelen (slechts 24%).



figuur 7

Op bijna de helft van de scholen (45%) wordt gebruik gemaakt van een speciaal programma voor ‘zwakke’ rekenaars. Bijna alle respondenten (90%) geven aan dat op hun school/schoollocatie geen speciaal programma voor ‘sterke’ rekenaars wordt gebruikt. Programma’s die worden genoemd voor zwakke en sterke rekenaars zijn Rekenwerk, Got It, Muiswerk en RT-Rekenen.

Het gebruik van rekentoetsen
De meeste scholen gebruiken de Cito-toets en het Cito Volgsysteem VO (VAS). Ook worden er regelmatig zelf ontwikkelde toetsen of methodetoetsen gebruikt.
De ABC-toets en de Cito-toets worden vooral ingezet als instaptoets; het Cito-volgsysteem VO (VAS), de zelf ontwikkelde toetsen en de methode-toetsen worden vooral ingezet als volgtoets. Als eindtoets worden vooral ingezet de Cito-toets en de methode-toetsen.
Op drie vijfde van de scholen (59%) wordt het instapniveau van de brugklasleerlingen op rekengebied vastgesteld door het afnemen van een instaptoets. Van de scholen baseert 16% zich op de gegevens van de basisschool of stelt het instapniveau vast op een andere manier (15%). Bij 11% wordt geen instapniveau vastgesteld.
Het afnemen van rekentoetsen wordt minder naarmate de leerjaren vorderen.
Op het vmbo (breed) wordt gemiddeld vaker getoetst. Het aantal toetsen gaat van gemiddeld 4 in het eerste jaar naar 2,5 in het laatste jaar.
Bij het rekenonderwijs worden verschillende lesmaterialen gebruikt. Veel genoemd worden boeken van vo rekenmethodes (42%), digitale materialen behorend bij een

vo rekenmethode (41%) en boeken van een vo wiskundemethode (40%).

Niveauverschillen tussen leerlingen

Op de meeste scholen (82%) wordt – als er gedifferentieerd wordt in het rekenonderwijs – op basis van niveau gedifferentieerd tussen de leerlingen. Dit wordt op afstand gevolgd door tempodifferentiatie (53%) en differentiatie op inhoud (41%). Het minst wordt volgens de respondenten gedifferentieerd op leerstijl (12%).

De kosten van het rekenbeleid

Gemiddeld wordt dit schooljaar (2012-2013) 16 euro per leerling aan lesmaterialen voor het rekenonderwijs uitgegeven.
Bijna de helft van de respondenten (47%) geeft aan dat deze kosten worden betaald uit de reguliere gelden; 48% geeft aan dat de kosten worden betaald uit de additionele gelden. Ruim een derde van de respondenten (37%) geeft aan niet te weten uit welke middelen deze kosten worden betaald.
Gemiddeld heeft 14% van de reken- en vakdocenten het afgelopen jaar na- of bijscholing gevolgd en 35% van de rekencoördinatoren. De gemiddelde kosten hiervoor zijn 520 euro voor een rekendocent, 285 euro voor een vakdocent en 957 euro voor een rekencoördinator.

	Gemiddelde kosten per leerling
Totaal	€ 16
Gymnasium	€ 2
Havo/Vwo	€ 13
Mavo(vmbo-t)/Havo	€ 12
Mavo(vmbo-t)	€ 14
Vmbo-breed	€ 24

Vraag 53: Kunt u een indicatie geven van de kosten (schooljaar 2012-2013) voor alle lesmaterialen tezamen voor het rekenonderwijs op uw school/schoollocatie? Het gaat dus om de optelsom van kosten voor de aanschaf van boeken voor leerlingen, kopieerkosten voor leerlingenmateriaal, licenties voor leerlingen, etc. Wij verzoeken u vriendelijk om de kosten per leerling te noteren, uitgaande van alle leerlingen van de school/schoollocatie.

figuur 8

Twee derde van de respondenten (66%) geeft aan dat hun school geen extra kosten heeft gemaakt voor de aanschaf van hardware ten behoeve van de inzet van ict-materialen voor het rekenonderwijs; op een klein deel (15%) van de scholen zijn hiervoor wel kosten gemaakt.
Bijna alle respondenten (91%) geven aan dat hun school/schoollocatie geen speciale aanpassingen in het schoolgebouw heeft aangebracht naar aanleiding van de invoering van de referentieniveaus taal en rekenen. Slechts 4% van de scholen/schoollocaties heeft speciale aanpassingen in het schoolgebouw aangebracht. Deze aanpassingen betreffen meestal het creëren van een ICT- ruimte of computerlokaal.

Conclusie

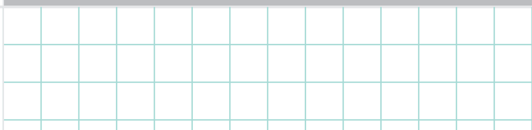
Uit de eerste analyse van de resultaten van het onderzoek concluderen we dat het merendeel van de vo-scholen rekenbeleid heeft ontwikkeld en een vorm van rekenonderwijs heeft ingevoerd. De gymnasia besteden nauwelijks extra tijd aan rekenen en de vmbo-T scholen (mavo) hebben rekenen het meest structureel een plek gegeven. Op meer dan 80% van de vmbo scholen worden aparte rekenlessen gegeven, op de gymnasia gebeurt dat nauwelijks. Rekenlessen worden meestal door wiskundedocenten gegeven. Er zijn nauwelijks scholen die een aparte rekendocent hebben.
Op bijna alle scholen is rekenen een (belangrijk) onderwerp van gesprek, en rekenen is een aanleiding die tot samenwerking binnen de school heeft geleid. Samenwerking buiten de school (met po en vervolgonderwijs) voor wat betreft rekenen, is vooral iets van de vmbo-T scholen. Scholen herkennen dat rekenen ook in andere vakken gebeurt. Er wordt aangegeven dat er bij economie meer dan bij wiskunde wordt gerekend.
Bij de invulling van het rekenen op de vo-scholen, zijn de scholen op zoek naar vormen van differentiatie en rekenen op maat. Dat gebeurt nu vooral in niveaudifferentiatie in de klas.
In het vervolg van het onderzoek gaan we op zoek naar de onderlinge relaties tussen de verschillende factoren en kenmerken van rekenen, en willen we ook de connectie met scores van leerlingen op rekentoetsen leggen. Tot slot willen we de kosten die er met het rekenen op vo gemoeid zijn, koppelen aan de verschillende invullingen van het rekenonderwijs.
Uit het onderzoek blijkt dat de meeste scholen gekozen hebben rekenen als een extra vak op school een plek te geven, en dat is binnen enkele jaren gebeurd.

Info

Het gehele rapport met daarin de resultaten en antwoorden op alle vragen die in het onderzoek zijn gesteld, is op te vragen bij het APS, t.a.v. Martin van Reeuwijk (e-mailadres: *m.vanreeuwijk@aps.nl*).
Zie ook de website *www.apsrekenen.nl* .

Over de auteurs

Martin van Reeuwijk, Susanne Spiele, Madeleine Vliegenthart en Peter van Wijk zijn allen werkzaam bij het APS.
E-mailadressen: *m.vanreeuwijk@aps.nl*, *s.spiele@aps.nl*, *m.vliegenthart@aps.nl*, *p.vanwijk@aps.nl*



De betekenis van het ‘Protocol ERWD VO’

VOOR LEERLINGEN MET REKENPROBLEMEN OF DYSCALCULIE

[prof. dr. J.E.H. van Luit]

Inleiding

Het afgelopen najaar verschenen de protocollen ‘Ernstige RekenWiskunde-problemen en Dyscalculie VO’ en ‘Ernstige RekenWiskunde-problemen en Dyscalculie MBO’ (zie [1] en [2]) als aanvulling op het ‘Protocol Ernstige RekenWiskunde-problemen en Dyscalculie’ in het basisonderwijs, het speciaal basisonderwijs en het speciaal onderwijs (zie [3]). De uitgangspunten en de uitwerking van de drie protocollen sluiten op elkaar aan. Het ‘protocol’ voor het voortgezet onderwijs bestaat uit vijf delen en de inhoud vormt de achtergrond van deze korte bijdrage:

- *visie en organisatie*: de visie op rekenen en de gevolgen voor beleid en organisatie;
- *rekenen*: de didactiek van rekenen;
- *afstemmen:* de signalering en observatie van rekenzwakke leerlingen;
- *begeleiding*: de manieren van begeleiden bij verschillende gradaties van rekenproblematiek, en
- *onderzoek*: de werkwijze bij de diagnostiek van rekenproblemen.

Visie en organisatie

In het eerste deel van het ‘protocol’ wordt beschreven dat de aandacht voor rekenen en rekenvaardigheid de afgelopen jaren hoog op de maatschappelijke en politieke agenda is komen te staan. In de media verschenen diverse publicaties over de zwakke rekenvaardigheid van scholieren en studenten. De overheid heeft bepaald dat iedere scholier aan het einde van het voortgezet onderwijs (vo) of een middelbare beroeps opleiding (mbo) over een basaal niveau van ‘functionele gecijferdheid’ moet beschikken. Daartoe is wetgeving opgesteld en beleid ontwikkeld met betrekking tot het gewenste niveau van rekenen. In het vo komen rekentoetsen op 2F- en 3F-referentieniveaus en moet rekenvaardigheid los van wiskunde aangeboden en getoetst worden.

Het ‘protocol ERWD VO’ is bedoeld als een leidraad voor de ondersteuning van en afstemming op rekenzwakke leerlingen in het vo. Het biedt handvatten voor het inrichten van goed rekenonderwijs. Het ‘protocol’ schetst de diversiteit in leerlingen wat betreft hun rekenvaardigheid bij instroom in het vo. De visie op rekenonderwijs en rekenproblemen wordt in het ‘protocol’ geduid door sleutelwoorden als ‘succesbeleving, motivatie, afstemming en actieve deelname’. Doel van het rekenonderwijs is dat leerlingen aan het eind van het vo voor rekenen een bij de gevolgde opleiding passend ‘referentieniveau’ (2F of 3F) behalen. De schrijvers van het ‘protocol’ gaan er terecht van uit dat er binnen alle opleidingsniveaus en leerroutes leerlingen zullen zijn met problemen op het gebied van het leren rekenen. Er wordt van dyscalculie gesproken als ernstige rekenproblemen, ondanks langdurige deskundige begeleiding en zorgvuldige afstemming, hardnekkig blijken en blijven voortduren. Dyscalculie wordt veelal in de basisschoolperiode gediagnosticeerd, maar het is ook mogelijk dat deze stoornis pas in het vo of mbo wordt vastgesteld (zie [4]).

In het ‘protocol’ wordt ingegaan op de keuzes die een school kan maken om het rekenbeleid vorm en inhoud te geven, en daarmee hoe tegemoet gekomen kan worden aan de onderwijsbehoeften van met name rekenzwakke leerlingen. Zo komen onderwerpen aan bod als ‘hoe kan de leraar omgaan met onvoldoende rekenprestaties, welke varianten zijn zoal mogelijk om het rekenonderwijs op te zetten, hoe organiseert een school dat leerlingen hun rekenvaardigheid onderhouden, hoe stemt een school het aanbod binnen een leerroute af op de behoeften, welke deskundigheden heeft een school nodig om rekenonderwijs en zorg te bieden en hoe zorgt de school dat betrokkenen samenwerken en relevante informatie (kunnen) delen?’

Rekenen

De rekenontwikkeling van leerlingen wordt in het ‘protocol’ langs vier hoofdlijnen binnen alle (sub)domeinen voor rekenen beschreven: verder ontwikkelen van begripsvorming, verder ontwikkelen en consolideren van oplossingsprocedures, vlot rekenen en onderhouden en flexibel toepassen en verdiepen. De vier hoofdlijnen worden ***in de kadertekst*** op pag. 288 nader toegelicht.

Afstemmen

In dit deel staan twee modellen centraal om leerlingen te observeren bij hun rekenactiviteiten en eventuele problemen te signaleren en te analyseren. Het eerste model (handelingsmodel) is een schematische weergave van de rekenontwikkeling die iedere leerling doorloopt. Het model toont de opbouw van en de samenhang tussen de verschillende niveaus van handelen. Het tweede model (drieslagmodel) is bedoeld probleemoplossend handelen aan te reiken. Het laat zien hoe een leerling een oplossingsprocedure bij contextopdrachten doorloopt. Het eigenlijke rekenen is slechts een onderdeel van het probleemoplossend handelen, maar meestal wel essentieel voor het resultaat.

Begeleiding

Voor de totstandkoming van een goede rekenontwikkeling bij zwakke rekenaars bepleit het ‘protocol’ dat leerlingen die in het vo in aanmerking komen voor rekenhulp, worden ingedeeld in één van de

» De eerste hoofdlijn bij het leren rekenen is verder ontwikkelen van begripsvorming. Bij het uitvoeren van rekenactiviteiten en rekenopdrachten moeten leerlingen begrip blijven ontwikkelen van wat ze doen en waarom ze dat doen. Dit betekent dat de leerling zich iets kan voorstellen bij een rekenactiviteit of een rekenkundige handeling in een bepaalde situatie en begrijpt wat er dan precies gebeurt. Verder is inzicht in rekenconcepten nodig om adequaat te kunnen handelen in rekensituaties. In het vo is het van belang dat leerlingen hierover kunnen redeneren en discussiëren met de leraar en met elkaar.
» De tweede hoofdlijn betreft het verder ontwikkelen en consolideren van oplossingsprocedures. Begripsvorming (eerste hoofdlijn) zou moeten ontstaan door te werken met contexten. Goede contexten bieden volgens 'het protocol' de leerling de mogelijkheid oplossingsprocedures te leren en toe te passen, zodat ze gestoeld zijn op begrip. De oplossingsprocedures die leerlingen moeten leren zijn: basisbewerkingen, complexere bewerkingen, hoofdrekenen en rekenen op papier, schatten en precies rekenen, en werken met een rekenmachine.
» De derde hoofdlijn is vlot rekenen en onderhouden. Om vlot te kunnen rekenen is regelmatig en systematisch oefenen en gebruik van rekenkennis en rekenvaardigheden noodzakelijk. Alleen zo komen leerlingen tot automatiseren, memoriseren en paraat hebben van basale rekenkennis en -vaardigheden. Dagelijkse oefening van 5 tot 10 minuten per dag helpt de rekenkennis en -vaardigheden te onderhouden.
» De vierde hoofdlijn is flexibel toepassen en verdiepen. In het dagelijks leven is rekenen onderdeel van functionele situaties. Rekenkennis en -vaardigheden zijn nodig voor het uitvoeren van alledaagse activiteiten. Daarom is het nodig dat leerlingen hun kennis en vaardigheden gedurende de gehele schoolperiode flexibel (verder) leren toepassen en hierdoor verdiepen. De rekentaken dragen er toe bij dat passende oplossingsprocedures gebruikt kunnen worden bij het oplossen van rekenvraagstukken, passend bij de context. Het rekenonderwijs dient er ook voor te zorgen dat leerlingen leren strategisch te denken en te handelen om keuzes te maken en beslissingen te nemen bij het oplossen van rekentaken.

drie begeleidingscategorieën (categorie 1: zwakke maar leerbare leerlingen, categorie 2: leerlingen die ernstige rekenproblemen ondervinden, en categorie 3: leerlingen die een psychodiagnostisch onderzoek door een gedragsdeskundige behoeven).
Dit betekent dus de nodige organisatorische aanpassingen in de school. Plaatsing van leerlingen in een begeleidingscategorie gebeurt bij de start in het vo op basis van gegevens van het basisonderwijs of zo spoedig mogelijk na de start als de rekenprestaties tegenvallen. Als desondanks de moeilijkheden toenemen, zal de begeleiding steeds specifieker afgestemd en intensiever moeten worden.

Onderzoek

In het protocol diagnostiek voor gedragsdeskundigen (protocol DDG) (zie [4]) wordt uiteengezet hoe door een gedragsdeskundige (onderwijsbegeleider) nagegaan kan worden of bij een leerling sprake is van een (ernstig) rekenprobleem of dyscalculie. Hierbij wordt gebruik gemaakt van drie toetsbare criteria waarmee dyscalculie kan worden vastgesteld: criterium van ernst, criterium van achterstand en criterium van didactische resistentie. Het belang van dit onderscheid tussen rekenprobleem en dyscalculie is niet zozeer een verschil in behandelen, maar in het bijzonder de faciliteiten die aan kinderen met de stoornis dyscalculie zouden moeten worden geboden.

Het protocol DDG bevat een uitgebreid scala aan richtlijnen en suggesties over tests die gebruikt kunnen worden om de met leren rekenen samenhangende factoren te kunnen onderzoeken. Hiermee kan een invulling worden gegeven aan de uitgebreide procedure die nodig is om dyscalculie vast te stellen. Zo worden voor de verklaring van de rekenstoornis testmiddelen aangereikt die de volgende factoren nagaan: planningvaardigheid, benoemsnelheid, verbaal en visueel-ruimtelijk geheugen, aandacht en concentratie, werkhouding en motivatie, competentiebeleving, (faal)angst, leerproblemen en sociaal-emotionele ontwikkeling.

Afsluiting

Wat levert het 'protocol' nu eigenlijk op? Het belangrijkste doel is zwakke rekenaars passende en effectieve rekenbegeleiding te bieden. In de school is optimale afstemming van het rekenonderwijs op de onderwijsbehoeften van de leerling noodzakelijk. Dit is een open deur, maar wordt nog lang niet door alle scholen in praktijk gebracht.
Het 'protocol ERWD VO' biedt handreikingen en richtlijnen voor het handelen van de leraar en de rekenexpert in school. Hiermee kunnen zij in de praktijk effectief rekenwiskundeonderwijs realiseren en optimaal onderwijsrendement nastreven. Het 'protocol ERWD VO' biedt een helder idee hoe in scholen met leerlingen met een rekenprobleem omgegaan zou moeten worden.
Naar mijn idee vragen de geformuleerde voorstellen wel behoorlijk veel van de tijd van scholen, maar ook van de competenties van allen die in school direct of indirect met het rekenonderwijs van zwakke leerlingen te maken hebben.

Het past bij de ambities van het ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap om het onderwijs passend te maken voor alle leerlingen, zodat ze de rekentoets kunnen halen. Maar tegenover al die extra zorg staat geen extra geld en zeker ook nog geen passende toets. Het is dus zeer de vraag of alle genoemde ambities verwezenlijkt zullen kunnen worden.

Info

Een uitgebreide versie van dit artikel (PDF-formaat, ca. 150 kB) is te vinden op: *www.nvvw.nl/media/downloads/eucl(886)erwd.pdf*

Literatuur

[1] M. van Groenestijn, G. van Dijken, D. Janson (2012): *Protocol Ernstige RekenWiskunde-problemen en Dyscalculie VO*. Assen: Van Gorcum.
[2] M. van Groenestijn, G. van Dijken, D. Janson (2012): *Protocol Ernstige RekenWiskunde-problemen en Dyscalculie MBO*. Assen: Van Gorcum.
[3] M. van Groenestijn, C. Borghouts, C. Janssen (2011): *Protocol Ernstige RekenWiskunde-problemen en Dyscalculie BA SBO SO*. Assen: Van Gorcum.
[4] J.E.H. van Luit, J. Bloemert, E.G. Ganzinga, M.E. Mönch (2012): *Protocol dyscalculie: Diagnostiek voor gedragsdeskundigen*. Doetinchem: Graviant.

Over de auteur

Prof. dr. J.E.H. van Luit is hoogleraar diagnostiek en behandeling van kinderen met dyscalculie aan de Universiteit Utrecht en hoofd van het Dyscalculie Expertisecentrum Nederland.
E-mailadres: *j.e.h.vanluit@uu.nl*

WwF-financiering van een project in Kenia

BOEKEN VOOR DE MENZAMWENYE SECUNDARY SCHOOL

[Betty Straatman-de Witte]

Dit project was de eerste officiële actie van de stichting 'Wassenaar steunt Afrika'.

Mag ik me even voorstellen. Ik ben Betty Straatman, sinds december 1971 werkzaam als docente wiskunde. De eerste 25 jaar was ik werkzaam op mavo's in Capelle aan de IJssel en Zoetermeer. In 1999, twee jaar na het behalen van mijn eerste graad, ben ik op het Adelbert College in Wassenaar gaan werken.
De school had juist besloten een meerjarenproject te gaan steunen in Kenia. In het begin was het bouwen van lokalen het belangrijkst. Leerlingen kregen de kans om de projecten te bezoeken. Op school werden veel acties georganiseerd, en er was natuurlijk begeleiding nodig. Ik heb vele jaren de kans gekregen een groep leerlingen te begeleiden. In 2009 was de laatste reis met leerlingen, mede georganiseerd door mijzelf.

De school besloot zich te richten op andere projecten. De vervolgstap was dat ik samen met een oud-collega probeer de scholen te blijven ondersteunen. Dat gebeurt via de stichting 'Wassenaar steunt Afrika'.
In mijn herfstvakantie plan ik ieder jaar een reis naar Kenia. Mijn interesse gaat natuurlijk naar het wiskundeonderwijs. Met leerlingen bezochten we altijd een middelbare school, maar dan was ik er voor hun begeleiding. Nu heb ik meer tijd om me ook met het onderwijs bezig te houden. In december 2010 hebben alle leerlingen van de Menzamwenye Secundary School, die in 2008 is gestart, een eigen wiskundeboek gekregen. Tot die tijd lag er voor ieder leerjaar een setje van 5 boeken klaar en die rouleerden tijdens de les. Ook schreef de docent veel opgaven op het bord. In 2011 zouden er voor de eerste keer eindexamens zijn; dus meer boeken voor alle vakken was wenselijk. Door de gift van het WwF van 500 euro en een actie van leerlingen van het Adelbert College hadden we nu de 2500 euro bij elkaar en werden er voor vier leerjaren voor alle vakken 30 leerboeken besteld. Ook kwamen er voor de docenten handleidingen en uitwerkingen – de docenten zijn veelal leerlingen die het diploma voor de secundary school op zak hebben. Er werden passers en geo-driehoeken aangeschaft. Rekenmachines hadden we het jaar ervoor gesponsord gekregen.

Wat betreft de opleiding van docenten ligt hier misschien nog een taak voor ons, wiskundedocenten. Een universitaire studie kost € 2000,- per jaar en dat 4 jaar lang. Dat kunnen maar weinig jongeren met een diploma van de secundary school opbrengen.

Op het moment dat de boeken kwamen, was er een aantal studenten van de TU Delft ter plekke. Zij deden een onderzoek naar de kwaliteit van water. Zij hielpen de heer Francis Nzai, Keniaanse medewerker van de stichting Tenda Pamoja, die een groot aantal Nederlandse sponsoren vertegenwoordigt, waaronder ook de stichting 'Wassenaar steunt Afrika', waarvan ik voorzitter ben. Zo is voortgang en controle het hele jaar door gegarandeerd.

In oktober 2012 heb ik een aantal wiskundelessen bijgewoond. In een klas van ruim 50 leerlingen is er volop aandacht voor de uitleg van de docent. Ook in het tweede leerjaar, waar een onervaren leerkracht het prettiger vond in mijn aanwezigheid stof uit het eerste jaar weer eens te herhalen. Passers en geo-driehoeken zijn er nog wel maar helaas – net als bij ons – soms wat kleiner dan normaal en met ontbrekende schroefjes. Bordmateriaal had ik van mijn school meegenomen maar de docent tekent meestal uit de hand.

Ik heb grote bewondering voor onze collega's daar. Misschien willen wel meer vakgenoten eens een week mee om te zien onder welke omstandigheden mensen daar werken.
De stichting 'T4T' [Teachers for Teachers; *www.teachers4teachers.nl* ; red.], eerst vooral gericht op intervisieweken in het basisonderwijs, heeft al jaren programma's voor mensen betrokken bij het basisonderwijs en gaat zich nu ook richten op de middelbare school.
Ikzelf ga komende oktober voor 14 dagen (voordeel van pensioen) naar Kenia en wil daar de mogelijkheden voor een goede invulling van zo'n week bekijken.

Belangstelling? Stuur dan een e-mailbericht naar *betty.straatman@bart.nl*

Info
Het WwF, sinds 1993 een werkgroep van de NVvW, ondersteunt activiteiten in derdewereldlanden gericht op het wiskundeonderwijs in middelbare scholen. Veelal betreft het de aanschaf van leermaterialen, of het ondersteunen van de professionalisering van leraren. Het fonds krijgt zijn middelen door bijdragen van de leden van de NVvW en door de verkoop van 'oude' wiskundeboeken.
Zie ook de website van het WwF (*www.nvvw.nl/page.php?id=1813*).
Contactpersoon WwF in Nederland: Juliëtte Feitsma
E-mailadres: *juliettefeitsma@kpnplanet.nl*

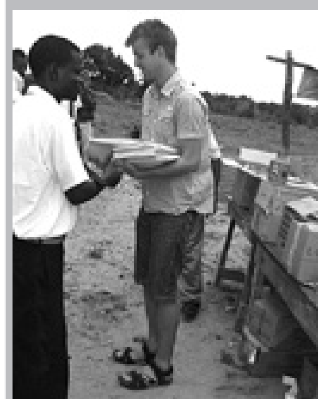


foto 1 Overhandiging boeken



foto 2 Uitstalling van de boeken

Een goed begin…

DURVEN

[Erika Bakker]

Erika Bakker is dit schooljaar gestart met haar LIO-stage Wiskunde als onderdeel van haar Educatieve Master en deelt haar belevenissen met u. In dit nummer de vijfde aflevering van haar rubriek.

Naast het lesgeven en de bezigheden die hier direct mee te maken hebben, zoals voorbereiden en nakijken, kom ik er dit jaar achter dat 'docent zijn' uit veel meer bestaat. Natuurlijk weet je van tevoren dat er zich andere activiteiten op school afspelen. Hier zomaar bij mee draaien vind ik niet gemakkelijk. Weliswaar kan ik vanaf het begin van het schooljaar al goed opschieten met mijn wiskundecollega's, met andere collega's is dat anders. Er is een aparte ruimte voor wiskundedocenten, waar je elkaar in tussenuren tegenkomt, zodat je elkaar gemakkelijk leert kennen. Een praatje is zo gemaakt. De andere collega's zie ik alleen in de gang of in de pauze in de personeelskamer, maar dan leer je elkaar toch minder gemakkelijk kennen. Van de meeste collega's weet ik nu wel ongeveer welke vakken ze geven, maar ik ken nog lang niet alle namen.

Aan het begin van het schooljaar werd er voor de brugklassen een spelletjesavond georganiseerd. Diverse collega's vertelden me dat leerlingen het erg leuk vinden als er ook docenten komen. Omdat ik twee brugklassen heb, was dit natuurlijk een goede gelegenheid om de kinderen ook eens buiten de wiskundeles te zien. Ik vond het heel erg spannend, omdat ik op dat moment nog weinig collega's kende. Die avond heb ik dan ook weinig met collega's gepraat. Het praten met leerlingen ging veel gemakkelijker. Een opmerking als 'Heey mevrouw Bakker, wilt u ook een keer meedoen?' stelt je dan heel erg op je gemak. Toen ik weer naar huis ging, was ik blij dat ik was gegaan. Soms moet je iets doen wat je eigenlijk niet zo goed durft.

Afgelopen vrijdag werd er een talentenjacht voor de brugklassers georganiseerd. Omdat ik al bij de spelletjesavond was geweest, wist ik ongeveer wat er ging gebeuren. Toen ik door de achteringang de school binnenkwam en door de hal liep, zag ik een aantal leerlingen uit één van mijn klassen staan. Ze riepen: 'Mevrouw Bakker!' Ik voelde me direct helemaal thuis, omdat ik dacht dat de leerlingen het leuk vonden dat ik naar de optredens kwam kijken. De leerlingen waren inderdaad erg blij om me te zien, maar dat had een andere reden. Ze waren hun schoolpasjes vergeten en konden aan de meneer bij de deur dus niet aantonen dat ze inderdaad in de brugklas zaten. Ik kon hun verhaal bevestigen en de leerlingen renden naar de kapstok. Snel riep een van de meisjes 'Bedankt', maar toen was ik weer uit beeld.



Toen de optredens waren afgelopen, was het tijd voor disco. De leerlingen hielpen om de stoelen aan de kant te zetten en het feest kon beginnen. Samen met de andere docenten stond ik aan de kant te kijken. Een meisje dat tijdens mijn lessen altijd heel stil is, stond met een glimlach op haar gezicht te praten met kinderen uit andere klassen. De jongens met een grote mond liepen samen met de stille jongens in een polonaise. Op zo'n avond zie je de leerlingen echt van een heel andere kant. Door een aantal kleine meisjes werden alle docenten gedwongen om ook mee te dansen. Als leerling wil je erbij horen en net zo dansen als de andere leerlingen. Als docent maakt het helemaal niets uit. Je hoeft nergens bij te horen en leerlingen vinden het geweldig dat je tussen ze in staat: 'Ik had nooit gedacht dat ik mijn wiskundelerares nog eens zou zien dansen.' Voordeel van een brugklasavond is dat het om elf uur afgelopen is. Na met het opruimen te hebben geholpen kon ik naar huis en op zaterdag kon ik op tijd opstaan om mijn lessen voor de komende week voor te bereiden.

Het was geweldig om de leerlingen zo op het podium te zien. De zang was niet altijd zuiver, en niet alles ging goed. Toch kreeg elke leerling een positief jurycommentaar en een enorm applaus van de andere brugklassers. Stralend als echte artiesten kwamen ze van het podium af. Net als ik weer een ervaring rijker. Het knapste vond ik dat deze leerlingen het aandurven om voor zo'n grote groep publiek op het podium te gaan staan.
Maar ja, soms moet je gewoon iets doen wat je eigenlijk niet zo goed durft.

Over de auteur
Erika Bakker studeert aan de Rijksuniversiteit Groningen. In 2010 rondde ze haar Bachelor Wiskunde af. Nu doorloopt ze in het kader van haar Educatieve Master een LIO-traject.
E-mailadres: *h.b.bakker.1@student.rug.nl*



Getuigen
LA QUATRIÈME DIMENSION



[Danny Beckers]

Wiskundeonderwijs bestaat al eeuwen. Niet op dezelfde manier, niet met dezelfde doelen, en niet met hetzelfde idee achter het nut van dat onderwijs, maar op een bepaalde manier heeft het bestaan. Biografieën, aantekeningen, artefacten, films en boeken getuigen van dat onderwijs.
In de serie 'Getuigen' behandelt Danny Beckers dergelijke historische snippers, en plaatst hun betekenis in de context van die tijd.

Heeft u met uw klas wel eens een film bekeken? In het kader van een klassenuitje, of wellicht ter beloning aan het eind van het schooljaar komt het nog wel eens voor. Het fenomeen 'wiskundefilm' zal daarbij waarschijnlijk niet aan bod zijn gekomen. Toch heeft de wiskundefilm gedurende enkele decennia een rol van enige betekenis gespeeld. Hoewel de wiskundefilm in Nederland nooit de populariteit verwierf die het in Frankrijk en het Verenigd Koninkrijk had.

Het medium film maakte tijdens het laatste decennium van de negentiende eeuw snel furore. Daarbij ging de aandacht van het grote publiek vooral uit naar de films van vernieuwende cineasten als George Meliès (1861-1938), die met spectaculaire effecten de grenzen van de mogelijkheden opzocht en bij het publiek de suggestie van ruimtereizen en ander spektakel wist te wekken. Vandaar ook dat de bioscoop niet in alle pedagogische kringen met open armen werd begroet. Velen zagen in de groep mensen die in het donker opeen gepakt werden, een kiem van zedenverwildering. Daar kwamen de films zelf dan nog bij: die zouden de fantasie overprikkelen of anderszins mensen dom maken. Velen zagen het fenomeen film liever verdwijnen. De bioscoop trok echter dusdanig veel publiek dat er ook pedagogen opstonden die van de aantrekkingskracht van de film juist gebruik wilden maken om leerlingen te interesseren. Begin twintigste eeuw, in Nederland vooral in de jaren twintig, maakte de schoolbioscoop furore. In de schoolbioscoop konden scholen hun leerlingen kennis laten maken met kwalitatief goede films, die informatie boden over tal van onderwerpen. In de schoolbioscoop maakten de leerlingen van de lagere scholen kennis met verre landen en culturen en met tal van biologische fenomenen die ver buiten het bereik van mensen lagen.

Vooral binnen de biologie zag men mogelijkheden voor het nieuwe medium. Een van de bekendste 'wetenschappelijke' filmmakers was de bon-vivant Jean Painlevé (1902-1989); ***zie foto 1***. Hij was als bioloog afgestudeerd aan de Sorbonne en maakte furore met films over het leven in de zee. Met zijn zelfontworpen onderwatercamera wist hij unieke beelden vast te leggen. Met zijn film over het liefdesleven van de octopus verwierf de jonge filmmaker in 1927 in één klap wereldfaam, toen die film in de VS werd verboden omdat de paring al te uitvoerig en gedetailleerd in beeld was gebracht. Behalve dat zijn werk veel betekende voor de popularisering van de biologie, bracht het de biologie ook in wetenschappelijk opzicht vooruit, omdat er voor het eerst gedrag van dieren kon worden vastgelegd en in detail bestudeerd.

In 1937 opende het *Palais de la découverte* de poorten. Het *palais*, nog immer te bezichtigen in hartje Parijs, is vergelijkbaar met het hedendaagse wetenschapsmuseum Nemo: doel was om jongeren, volgens de advertenties van 6 tot 99 jaar, bekend te maken met de verworvenheden van de moderne wetenschap en techniek. Het werd geopend op het moment dat er een wereldtentoonstelling in Parijs was. Vanuit de wiskunde was Émile Borel (1871-1956) betrokken bij het *palais*. Deze wiskundige coryfee stelde voor dat de wiskunde in een aantal films aanwezig zou zijn bij de openingstentoonstelling. Jean Painlevé was de zoon van de wiskundige en beroemde Franse politicus Paul Painlevé (1863-1933). Vermoedelijk was dat een van de redenen dat Borel bij deze productie aan Jean dacht. De gepromoveerde grafentheoreticus en politiek actieve André Sainte-Laguë (1882-1950) werd als regisseur aangezocht.

Hoger dimensionale meetkunde was een hype in de jaren dertig van de twintigste eeuw. De betekenis van de hoger dimensionale meetkunde voor de relativiteitstheorie van Einstein was algemeen bekend. Al waren er slechts weinigen die ten volle beseften wat die theorie had bij te dragen aan de moderne fysica, de vierde dimensie sprak tot de verbeelding. De illusie werd gekoesterd dat kennis van en technische grip op de hoger dimensionale wereld allerlei problemen in onze wereld zou kunnen helpen oplossen. Op zich geen vreemd onderwerp dus voor een film.



foto 1 De wetenschapsfilm-pionier Jean Painlevé met zijn zelf gebouwde onderwatercamera. © Les Documents Cinématographiques, Paris

Painlevé maakte met *La quatrième dimension* een film die bij de Franse wiskundige gemeenschap zeer in de smaak viel en die ook in het Verenigd Koninkrijk nog lang zou worden geroemd. Hij begon met een uitleg over coördinaatassen ten behoeve van plaatsbepaling in een kamer, om vervolgens met behulp van analogie en trucage de vierde dimensie te introduceren (***zie de foto's 2 en 3***). Analogie gebruikte hij op verschillende manieren. Zo bracht hij bijvoorbeeld een tweedimensionale wereld in beeld, waarin platte muizen rondkropen. De muizen werden in verwarring gebracht door een persoon die vanuit de derde dimensie veranderingen aanbracht in het vlak waarin de muizen leefden (***zie de foto's 4a en 4b***). De trucages werden in de film gebruikt om potentiële mogelijkheden van

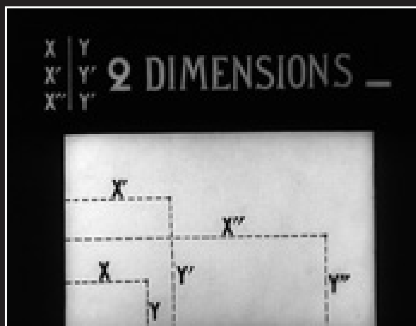


foto 2

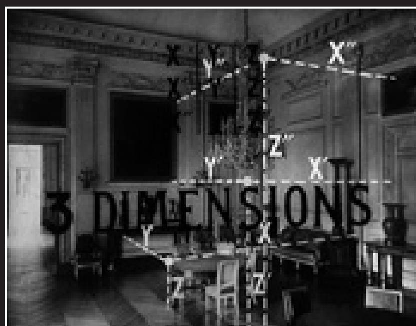


foto 3



foto 4a



foto 4b



foto 5

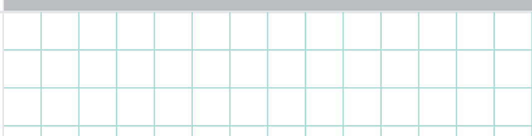
kennis over de vierde dimensie te kunnen illustreren. Zo liet de cineast mensen schijnbaar uit het niets in een kamer verschijnen (***zie foto 5***), en suggereerde hij de mogelijkheid van chirurgische operaties zonder snijden, omdat onze driedimensionale lichamen vanuit de vierde dimensie 'open' zouden zijn.

Binnen de Nederlandse gemeenschap van wiskundeleraren bestond weinig interesse voor het nieuwe medium. Hoewel er ongetwijfeld een aantal Nederlandse wiskundedocenten het *palais* bezochten of via kennissen op het bestaan van *La quatrième dimension* werden gewezen, werd het in *Euclides* niet besproken. Het waren niet zozeer ideologische redenen waarom de films geen succes werden. De Nederlandse docent wiskunde had zijn handen vol aan het ambitieuze wiskundeprogramma. Waar de gemeenschap van wiskundedocenten in veel landen tevens betrokken was bij de popularisering van het vakgebied, was dat in Nederland nauwelijks het geval. Vandaar dat een film als deze geen belangwekkend nieuws was. Een paar jaar later brak de oorlog uit en hadden mensen sowieso andere dingen aan hun hoofd dan het wetenschappelijk optimisme dat in *La quatrième dimension* zegevierde.

U heeft er nu in elk geval weer een idee bij voor een verloren uurtje: de films van Painlevé zijn op dvd verkrijgbaar, zodat u ze rustig met uw klas kunt bekijken. Of leerlingen meer interesse hebben voor het liefdesleven van de octopus of voor de vierde dimensie valt te bezien. In elk geval kunt u het gebrek aan interesse van onze collegae uit eerdere tijden helpen goedmaken. Misschien ook aardig voor bij geschiedenis of in de Franse les!

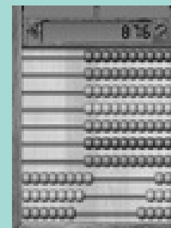
Over de auteur

Danny Beckers is voormalig wiskundedocent, consultant/ontwikkelaar passend onderwijs en universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. In die laatste hoedanigheid ligt zijn interesse vooral bij de geschiedenis van het wiskundeonderwijs. E-mailadres: *d.j.beckers@vu.nl*



Wiskunde digitaal

MOTION MATH DH

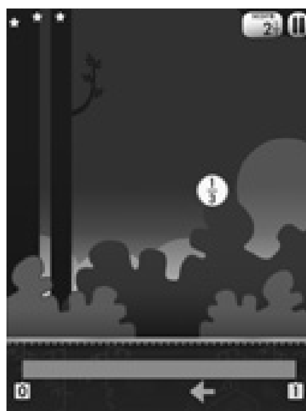


[Lonneke Boels]

Geschikt voor: iPhone, iPad, iPod touch

Het doel van dit spel is om breuken in allerlei notaties ongeveer op de juiste plek op een getallenlijn te plaatsen of snel te schatten of de breuk groter of kleiner dan $\frac{1}{2}$ is. Het spel is moeilijker dan *lobster diver* maar bevat – voor zover ik heb ontdekt – geen negatieve getallen. Om het spel te spelen, moet je de tablet bewegen, vandaar de naam Motion Math. Bij het niveau 'beginner' gaat het om eenvoudige breuken zoals $\frac{1}{3}$ of $\frac{3}{4}$. De breuken komen van boven naar beneden zeilen en door de tablet te bewegen kun je de breuk meer naar rechts of links laten gaan om hem zo goed op de getallenlijn te plaatsen.

Op het niveau 'medium' zijn de breuken lastiger en bij het niveau 'hard' komt ook 0,39 of $\frac{3}{17}$ voor waardoor het best een pittig niveau is. De puntentelling wordt ook in breuken gegeven. Er komen allerlei notatievormen van breuken in het spel voor: breuk, decimaal getal, in de vorm van een breukencirkel, enzovoorts. Er zijn heel veel levels (ik heb het spel nog niet uitgespeeld). Het niveau 'hard' is zelfs moeilijk voor de bovenbouw van havo/vwo en mogelijk een leuke manier om de voorkennis van breuken even op te halen. Graag horen we de ervaringen uit uw klas!

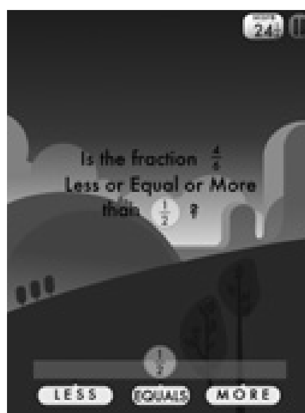


figuur 1 In de 'beginnersmode' krijg je eenvoudige breuken en hints. Als je fouten maakt, staat je sterretje lager en krijg je een deelscore (hier: ½; dus deze speler heeft de eerste half goed en de volgende twee helemaal goed; vandaar de score 2½).

Het spel is ontwikkeld door de Stanford School of Education. Het spel is onderzocht op effectiviteit. Kinderen die het spel 5 dagen, gedurende 20 minuten per dag speelden, verhogen hun scores op een toets met 15%, aldus de website van Motion Math. Het is onduidelijk met welke toets en hoe dit is gemeten. Maar dat het een leuk en leerzaam spel is, dat is wel duidelijk.

Pluspunten

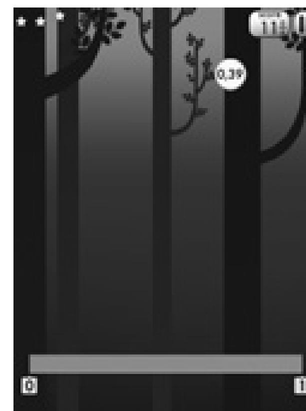
- Het spel start altijd zeer eenvoudig zodat je eerst de motorische vaardigheden oefent voordat je het schatten met breuken oefent.
- Het spel geeft hints die steeds explicieter worden zodat je er van leert als het niet direct lukt.
- Bij drie fouten (na alle hints) ben je af en kun je een high score noteren.
- Het spel kent drie moeilijkheidsniveaus: beginner, medium, hard. Beginner is geschikt voor basisschool en vmbo-BK, medium voor vmbo-GT en eerste klas havo/vwo, en hard voor havo/vwo, vermoedelijk zelfs in de bovenbouw.
- Je kunt pauzeren.



figuur 2 Er zijn verschillende spelvormen in het spel. Hier: is de breuk groter of kleiner dan een half?

Minpunten

- Je begint iedere keer opnieuw in level 1 (of lager) als je af bent of gestopt bent met het spel. Als je de motorische vaardigheden beheerst, is dat soms wel eens saai.
- De teksten zijn in het Engels.



figuur 3 Op het niveau 'hard' komen ook decimale getallen voor

Eindoordeel: aanschaffen

Kosten € 2,69

Meer informatie over het spel: *www.motionmathgames.com*

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft, docent vakdidactiek rekenen op de Haagse Hogeschool en directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen.

E-mailadres: *L.Boels@alaka.nl*

Uit de 'oude' doos

DE OPGAVE 2012, UITGEDEELD OP DE JAARVERGADERING

[Ton Lecluse e.a.]

Ook vorig jaar, in november, deelde ik een opgave uit op de jaarvergadering. Ik trof het eerste deel ervan aan in verschillende oude schoolboekjes [1, 2], en na enig speurwerk ook het tweede.

Deel 1
Gegeven zijn vier punten P, Q, R en S waarvan geen drietal collineair is; ***zie figuur 1***.
Teken een vierkant $ABCD$, waarvan op (het verlengde van) elke zijde één van de gegeven punten ligt. Hoeveel oplossingen zijn er?

Deel 2
Gegeven zijn vier punten A, B, C en D die op één lijn liggen; ***zie figuur 2***.
Teken een vierkant $PQRS$, waarvan op (het verlengde van) elke zijde één van de gegeven punten ligt. Hoeveel oplossingen zijn er?

Ik kreeg van een aantal collega's oplossingen binnen. Een rode draad door deze oplossingen is de rechte hoek (oftewel een kwart slag draaien), de cirkelstelling van Thales en de stelling van de omtrekshoek.

Een eerste strategie
De volgende strategie sluit mooi aan bij het huidige examenprogramma vwo-B.
In figuur 3a ligt A op de cirkel waarvan PQ middellijn is, en is M het midden van de cirkelhelft waarop A *niet* ligt. Vanwege de stelling van Thales is $\angle PAQ = 90°$. Door de gelijke cirkelbogen MP en MQ zijn de omtrekshoeken PAM en QAM gelijk; dus elk gelijk aan 45°. Deze figuur kan dus worden gezien als een fragment ***van figuur 3b***, waarin de diagonaal AC van vierkant $ABCD$ de hoeken bij A en C middendoor deelt.
Dit idee kan als volgt worden ingezet bij de gegeven vier punten P, Q, R en S (***zie figuur 4a***):
- teken de cirkel waarvan PQ middellijn is, en
- kies van een van de twee cirkelhelften het midden M.

Dan ligt M op de diagonaal AC van het gezochte vierkant.
Herhaal dit procedé:
- teken de cirkel waarvan RS een middellijn is, en
- kies van een van de twee cirkelhelften het midden N.

Dan ligt N (ook) op diagonaal AC van het gezochte vierkant.

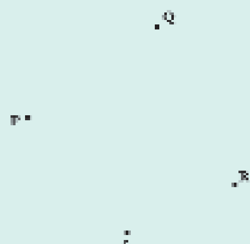
De vierkantsdiagonaal AC is dus een deel van de lijn MN. Aangezien A en C op de twee cirkels liggen, zijn het de twee 'nieuwe' snijpunten. Nu we de diagonaal AC van het vierkant hebben, kunnen we dit vierkant gemakkelijk afmaken (***zie figuur 4b***).

Er zijn meer oplossingen mogelijk bij het gegeven viertal punten P, Q, R en S. Bij de keuze van cirkels met middellijnen PQ en RS kan op beide cirkels het hulppunt M en/of N op de andere cirkelhelft gekozen worden. Dit levert vier verschillende vierkanten $ABCD$ op.
Ook kan voor de middellijn van de eerste cirkel het punt P met Q, R of S worden gecombineerd. Er zijn drie opsplitsingen: {PQ, RS}, {PR, QS} en {PS, QR}, die elk twee vierkanten geven.
Verder maakt het weinig uit hoe de punten P, Q, R en S onderling liggen. Ook wanneer drie van de vier punten of alle vier de punten collineair zijn, blijft de constructie gelden. Wel zijn er speciale gevallen:
- Als de lijn MN aan een van de cirkels raakt, valt dit raakpunt samen met A of C.
- Als M en N samenvallen, zijn er oneindig veel oplossingen: elke lijn door M die de cirkels snijdt, levert een oplossing.

Andere oplossingen
Ik ontving oplossingen die denkstappen hebben die terugkomen in bovenstaande aanpak, van Gerrit de Bruijn, Leon van den Broek, Gerhard Riphagen, Lieke de Rooij, Aad Goddijn en Sjoerd Zondervan. Ook werden door hen alternatieve oplossingen aangedragen.
Het is weliswaar zo dat sommige van de hierna volgende oplossingen op hetzelfde neerkomen, maar de beschreven denkwijzen van de oplossers zijn interessant. En daar gaat het natuurlijk óók om.

[Gerhard Riphagen]
Als je de vierhoek – met het vierkant dat je dan nog niet kent, eromheen – een kwartslag naar rechts draait, bijvoorbeeld om het punt P, krijg je de situatie als ***in figuur 5a***.
Wanneer je vervolgens verschuift over de vector $Q'P$, dan komt het punt S' op de bovenste zijde van het vierkant terecht, punt S''. Je kent het vierkant dan nog niet, maar je weet dan wel: R en S'' liggen op één zijde van dat vierkant. Die zijde is daarmee bepaald.
Vervolgens kun je het vierkant gemakkelijk afmaken met drie loodlijnen telkens door een volgend punt: Q, P en S (***zie figuur 5b***).

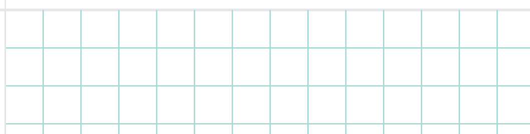
[Gerrit de Bruijn]
Eerst worden de vier cirkels getekend waarvan PQ, QR, RS en SP middellijnen zijn. De middelpunten zijn E, F, G en H; ***zie figuur 6a***.
Kies op de eerste cirkel een punt A. AQ snijdt de tweede cirkel in B, enzovoort. Zo ontstaat een rechthoek $ABCD$.
De projectie E' van middelpunt E op AQ deelt die koorde middendoor en de projectie F' van middelpunt F op QB deelt die koorde middendoor; ***zie figuur 6b***.



figuur 1



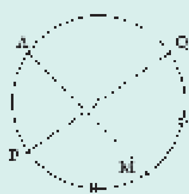
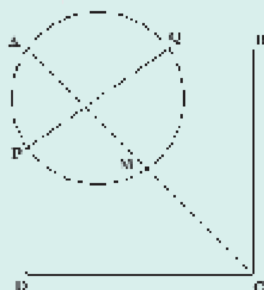
figuur 2

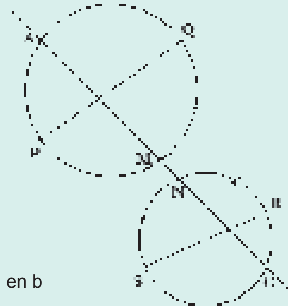


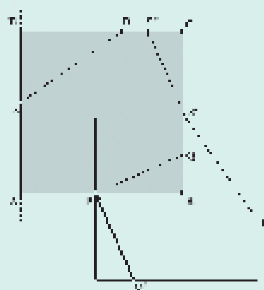
Er volgt dat AB twee maal zo lang is als $E'F'$.
Evenzo is BC twee maal zo lang als de projectie $F''G''$ van het lijnstuk FG op BC.
We moeten nu de richting van AB zó bepalen dat $E'F' = F''G''$. Dat kan als volgt; ***zie figuur 7a***.
Roteer het lijnstuk FG om punt F over 90°; G^* is het beeld van G. We willen de richting van AB zó kiezen dat de projecties van EF en G^*F op AB samenvallen. Teken daartoe de lijn door Q die loodrecht staat op EG^*. Het tweede snijpunt van die lijn met de eerste cirkel is het gezochte punt A. Hierna kan het vierkant $ABCD$ worden afgemaakt; ***zie figuur 7b***.
Bij de gekozen vier cirkels zullen de zijden van het vierkant door P, Q, R, S gaan *in die volgorde*. Bij die volgorde zijn er *twee* vierkanten mogelijk. Het tweede vierkant vind je door FG in de andere richting over 90° te roteren.

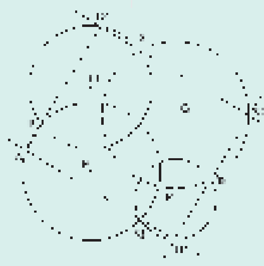
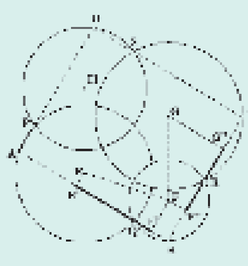
[Lieke de Rooij]
Afgezien van methoden waarbij je gebruik maakt van een hoek van 45° met de diagonaal, zijn er oplossingen waarbij je gebruik maakt van het feit dat de afstanden van de punten tot de overstaande zijden van het vierkant gelijk moeten zijn.
Eerst een analytische oplossing die leidt tot een constructie.
Kies een handig assenstelsel xOy, waarin de coördinaten van P, Q, R en S bekend zijn.
Stel de 'rico' van de zijde van het vierkant door P is a; die van de zijde door Q is dan $-\frac{1}{a}$.
Hiermee kun je de vergelijkingen van twee loodrecht op elkaar staande zijden uitdrukken in a en de coördinaten van P, Q, R en S.
Met de algemene afstandsformule
$$\frac{|a \cdot u + b \cdot v + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
voor een punt (u, v) tot een lijn met vergelijking $ax + by + c = 0$ kun je bijvoorbeeld de afstand van R tot de lijn door P gelijk stellen aan die van S tot de lijn door Q.
Ik geef een voorbeeld waarbij P in de oorsprong ligt en Q op de x-as.
Zie figuur 8, waarin $P(0, 0)$; $Q(1, 0)$; $R(4, 3)$; $S(2, 5)$.
De lijn door P is p, die door Q is q , de lijn door R is r en die door S is s.
Stel dat $p \,//\, r$ en dat q en s daar loodrecht op staan:
p: $ax - y = 0$; q: $x + ay - 1 = 0$
Dan geldt: $d(R, p) = d(S, q)$, dus
$$\frac{|4a-3|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|2+5a-1|}{\sqrt{a^2+1}} ,$$
of: $4a - 3 = 5a + 1$.
Dus $a = -4$ (als is weergegeven ***in figuur 8***); óf ook $4a - 3 = -5a - 1$, dus $a = \frac{2}{9}$.
Hiermee kunnen we het vierkant tekenen.
Meer algemeen – Als $P(0, 0)$, $Q(x_Q, 0)$, $R(x_R, y_R)$ en $S(x_S, y_S)$, dan geldt voor de eerste oplossing:
$$a = \frac{x_S + y_R - x_Q}{x_R - y_S}$$
en die helling is dan niet zo moeilijk te construeren. Het punt T heeft nu de coördinaten $(x_R - y_S \,;\, x_S + y_R - x_Q)$. De pijlen ***in figuur 8*** geven de constructie van punt T. De lijn door T en P is nu de lijn p, waarmee het vierkant is te voltooien. Voor het geval dat P, Q, R en S collineair zijn, gaat deze constructie over in:
$$a = \frac{x_S - x_Q}{x_R} .$$

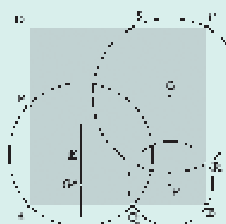
Een alternatief van Lieke – Kies het punt T zó dat $\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{SR}$; ***zie figuur 9a***.
Roteer T om P over 90° (twee mogelijkheden; geeft twee oplossingen).



figuur 3a en b


figuur 4a en b


figuur 5a en b



figuur 6a en b


figuur 7a en b

Het rotatiebeeld van T is U.
Dan ligt één van de zijden van het gezochte vierkant op lijn QU. En dit is in eerste instantie erg verrassend. Maar dit wetende, kan het gezochte vierkant nu snel gevonden worden door loodlijnen op QU te tekenen door R en S, en een lijn door P, evenwijdig aan QU; ***zie figuur 9b***.
Het is een aardige uitdaging te bewijzen dat vierhoek $ABCD$ inderdaad een vierkant is; in eerste instantie zijn alleen de loodrechte standen evident.
Het kan als volgt.
$\angle PUC = \angle SRC$ (want PU staat loodrecht op RS en UC staat loodrecht op RC).
En $PU = RS$. De twee paren evenwijdige lijnen worden dus verbonden door gelijke lijnstukken onder gelijke hoeken, zodat ook de loodrecht gemeten afstand tussen die evenwijdige lijnen gelijk is. Netter is natuurlijk om met loodlijntjes uit U op AD en uit S op DR congruente driehoeken te tekenen.

Nóg een alternatief van Lieke – Mooier, en op dezelfde basis, ***zie figuur 10a***:
- trek een lijn l door R loodrecht op QS, met snijpunt T, en
- kies op deze lijn l een punt E zo dat $RE = QS$.

Dan ligt een van de zijden van het gezochte vierkant op de lijn p door P en E.
(Punt E kan ook aan de andere kant van R op lijn l gekozen worden; dit levert een andere oplossing op.)

- Zie vervolgens ***figuur 10b***. Trek de lijn q door Q, met q loodrecht op p ;
- trek de lijn r door R, met $r \,//\, p$;
- trek de lijn s door S, met s loodrecht op p .

De lijnen p, q, r en s sluiten het gezochte vierkant in. De snijpunten zijn A, B, C en D. We moeten dit nog wel bewijzen.
Natuurlijk is $ABCD$ een rechthoek. Maar waarom gelijke zijden?
In figuur 10b zien we een koordenvierhoek $TSBE$ (de hoeken T en B zijn recht), zodat $\angle TEA = \angle TSB$ en $ER = SQ$, zodat ook hier evenwijdige lijnen worden verbonden met gelijke lijnstukken onder gelijke hoek. Gevolg is dat $ABCD$ een vierkant is.

Lieke stuurde ook enkele links waar het probleem wordt toegelicht; zie [3].

[Sjoerd Zondervan]
Er is altijd een rechthoek $ABCD$ te tekenen waarbij op elke zijde (of het verlengde daarvan) één van de punten P, Q, R en S ligt.
Bijvoorbeeld een rechthoek waarbij P en Q op overstaande zijden (of het verlengde daarvan) liggen.
- Teken een willekeurige lijn k door P die niet door Q, R of S gaat;
- teken lijn l door Q , evenwijdig met k ;
- teken lijn m door R , loodrecht op k ;
- teken lijn n door S, evenwijdig met m .

Deze vier lijnen sluiten dan een zo'n bedoelde rechthoek in; ***zie figuur 11***.

Door lijn k om P te draaien kunnen we twee standen van k vinden waarbij die rechthoek een vierkant wordt.
Stel $\angle$(lijn PQ, lijn RS) = α, $\angle$(vector PQ, k) = φ (een gerichte hoek: $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$) en $\angle$(lijn SR, k) = ϕ.
Dan geldt algemeen $\phi = \alpha + \varphi$ (buitenhoek van de driehoek waarvan α en φ binnenhoeken zijn).
De rechthoek is een vierkant als geldt $d(k, l) = d(m, n)$.

$$\begin{aligned} & PQ \cdot |\sin\varphi| = RS \cdot |\cos\phi| \\ (*)\ \ldots\ & PQ \cdot |\sin\varphi| = RS \cdot |\cos(\alpha+\varphi)| \\ & PQ \cdot |\sin\varphi| = RS \cdot |\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi| \end{aligned}$$

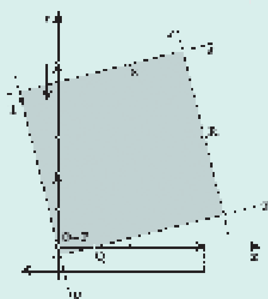
Zodat, met weglating van de absoluutstrepen en toevoegen van de factor p, die gelijk is aan ± 1:

$$PQ \cdot \sin\varphi = p\,(RS \cdot \cos\alpha\cos\varphi - RS \cdot \sin\alpha\sin\varphi)$$
$$PQ \cdot \sin\varphi + p \cdot RS \cdot \sin\alpha\sin\varphi = p \cdot RS \cdot \cos\alpha\cos\varphi$$
$$\sin\varphi \cdot (PQ + p \cdot RS \cdot \sin\alpha) = p \cdot RS \cdot \cos\alpha\cos\varphi$$

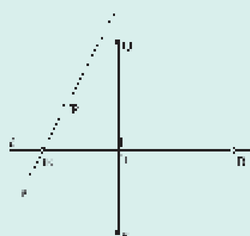
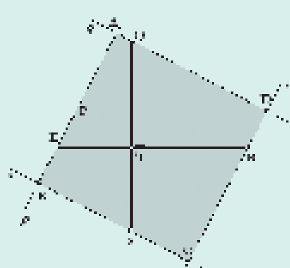
En dan is (omdat $p = 1$ of $p = -1$):

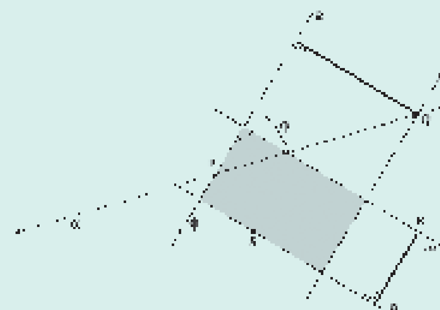
$$\tan\varphi = \frac{RS \cdot \cos\alpha}{PQ + RS \cdot \sin\alpha} \quad \text{of} \quad \tan\varphi = \frac{-RS \cdot \cos\alpha}{PQ - RS \cdot \sin\alpha}$$

Deze vergelijkingen geven in het algemeen elk twee oplossingen in het interval $[0, 2\pi\rangle$:
φ_1, $\varphi_1 + \pi$ en φ_2, $\varphi_2 + \pi$
De oplossingen φ_1, $\varphi_1 + \pi$ geven hetzelfde vierkant; de oplossingen φ_2, $\varphi_2 + \pi$ geven ook eenzelfde vierkant.
In het algemeen vinden we dus als P en Q op overstaande zijden (of op het verlengde daarvan) liggen, twee vierkanten.
Op dezelfde manier is dit aan te tonen als


figuur 8


figuur 9a en b



figuur 10a en b


figuur 11

P en *R* op overstaande zijden (of op het verlengde daarvan) liggen of als *P* en *S* op overstaande zijden (of op het verlengde daarvan) liggen.
In totaal zijn er 3 keer 2, dus 6 vierkanten.

Er zijn wel bijzondere configuraties.
a) Kies in het hierboven uitgewerkte voorbeeld $PQ = RS$ én PQ loodrecht op RS. Relatie **(*)** wordt dan
$|\sin\varphi| = |\cos(\frac{1}{2}\pi + \varphi)|$.
En deze vergelijking heeft oneindig veel oplossingen voor φ.

Algemeen – **Als**:

$$(PQ = RS \text{ én } PQ \perp RS) \text{ óf } (PR = QS \text{ én } PR \perp QS) \text{ óf } (PS = QR \text{ én } PS \perp QR)$$

dan zijn er oneindig veel vierkanten.
Een heel bijzonder geval is de situatie dat vierhoek *PQRS* een vierkant is. Ook dan is aan bovengenoemde voorwaarde voldaan. In dit geval zijn de oneindig vele ingeschreven en omgeschreven vierkanten eenvoudig te vinden.

b) Kies in het uitgewerkte voorbeeld:
$PQ \neq RS$ én $PQ \perp RS$. Relatie **(*)** wordt dan:
$PQ \cdot |\sin\varphi| = RS \cdot |\cos(\frac{1}{2}\pi + \varphi)| = RS \cdot |\sin\varphi|$
Dit leidt tot een ontaarde oplossing, $\varphi = 0$. Het 'vierkant' valt dan samen met het snijpunt van de lijnen *PQ* en *RS*.
Algemeen – **Als**:

$$(PQ \neq RS \text{ én } PQ \perp RS) \text{ óf } (PR \neq QS \text{ én } PR \perp QS) \text{ óf } (PS \neq QR \text{ én } PS \perp QR)$$

dan is er alleen een ontaarde oplossing.

[Aad Goddijn]

Aad vond in de opgaven ook inspiratie voor twee nieuwe:
1/ Gegeven vier punten *A, B, C* en *D* en een parallellogram.
Gezocht vier lijnen *a, b, c, d* door resp. *A, B, C, D* die een vierhoek insluiten die gelijkvormig is met het gegeven parallellogram.

2/ Gegeven vier punten *A, B, C* en *D*.
Trek de lijnen *a, b, c, d* door opvolgend *A, B, C, D* met *a* en *c* evenwijdig, en *b* en *d* loodrecht op *a* en *b*.
De lijnen sluiten een rechthoek in waarvan *K* het middelpunt is.
Wat is de meetkundige plaats van *K* als de lijn *a* alle richtingen doorloopt?

Aantal oplossingen

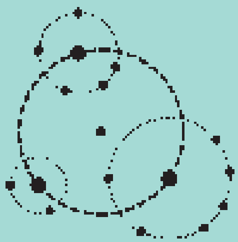
De inzenders hebben zich ook bezig gehouden met het *aantal* oplossingen. Dat zijn er 6, maar het zou te ver voeren om deze er hier telkens bij te tonen. Het is een uitdaging voor u – lezer – zelf bij een oplossingsmethode te onderzoeken hoe de andere vijf vierkanten te vinden zijn.
Het gegeven probleem is klassiek, en verre van origineel. Op internet zijn oplossingen te vinden. Dit geeft wel aan dat het probleem velen tot de verbeelding spreekt. Verrassend is toch wel het aantal varianten en de verschillen in aanpak. Hopelijk vindt u het ook een mooi probleem, ook (deels?) voor in de klas.

Noten

[1] H.A. Derksen, G.L.N.H. de Laive: *Leerboek der Vlakke Meetkunde IV*. Zutphen : W.J. Thieme & Cie. (1913); pag. 59, toepassing XI.
[2] W.H. Wisselink: *Vraagstukken ter oefening in de meetkunde (voor eerstbeginnenden)*, 15e onveranderde druk. Groningen: P. Noordhoff (1926); §12, oefening 58.
[3] [a] *On the square*. Op: *http://whistleralley.com/square/square.htm*
[b] *To Construct a Square with Edges on Any Four Points*. Op: *www.physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/4point.pdf*
[c] *How to draw a square through 4 points?* Op: *http://answers.yahoo.com/question/index?qid=20071206010329AAeB0dK*

Over enkele oplossers

Gerrit de Bruijn is docent wiskunde aan 't Atrium te Amersfoort.
Leon van den Broek (e-mailadres: *Leon.vandenbroek@wageningse-methode.nl*) is oud-docent wiskunde aan de RSG Pantarijn te Wageningen.
Gerhard Riphagen is docent wiskunde aan de vmbo-afdeling van de CSG Reggesteyn in Nijverdal.
Lieke de Rooij is docent wiskunde aan de Scholengemeenschap Dalton Voorburg te Voorburg.
Sjoerd Zondervan is oud-docent wiskunde aan het Bornego College te Heerenveen.
Ton Lecluse (e-mailadres: *a.lecluse@casema.nl*) is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort.



Het steunpunt wiskunde bij u in de buurt

[Theo van den Bogaart]

Verspreid over Nederland zijn er de afgelopen jaren 'regionale vaksteunpunten' voor wiskunde ontstaan. In dit artikel wordt uitgelegd wat dat zijn, wat voor activiteiten ze op dit moment ondernemen en, niet onbelangrijk, wat zo'n steunpunt voor u kan betekenen.

Wat is een steunpunt?

Een *regionaal vaksteunpunt wiskunde* is een organisatie die tot doel heeft het schoolvak wiskunde te versterken. Dit gebeurt door professionele ontwikkeling van docenten, door onderwijs en onderwijsontwikkeling en door de aansluiting tussen school en vervolgopleiding soepeler te maken. De basis vormt een netwerk van docenten uit het voortgezet en hoger onderwijs. In de praktijk gaat het initiatief vaak uit van hogeschool en universiteit.
De steunpunten zijn ontstaan om het nieuwe vak wiskunde D te ondersteunen. Hoewel de nadruk nog steeds ligt op wiskunde D, is de taakopvatting van de steunpunten breder aan het worden. Op dit moment zijn er twee belangrijke ontwikkelingen: geleidelijk aan komen alle wiskundevakken in de bovenbouw van havo en vwo in beeld – dus ook A, B en C – en bovendien worden de activiteiten steeds meer ingebed in brede regionale steunpunten voor *alle* bètavakken, waarmee een stabiele en robuuste organisatievorm aan het ontstaan is.

Laten we om het concreet te maken de activiteiten die steunpunten zoal ondernemen, op een rijtje zetten. Niet ieder steunpunt is op alle fronten actief. In de uitgebreide ***kadertekst*** bij dit artikel is geschetst wat de individuele steunpunten doen.

- *Lesmateriaal*. Vrijwel ieder steunpunt voelt zich verantwoordelijk voor een lesmodule wiskunde D – omdat het deze ontwikkeld heeft, of omdat het rondom zo'n module activiteiten onderneemt. Dit lesmateriaal is altijd vrij te gebruiken (zie het lesmateriaaloverzicht op *www.ctwo.nl*).
- *Contact en uitwisseling*. Via een steunpunt komen docenten met elkaar in contact. Het kan dan gaan over het uitwisselen van ervaringen, PTA's, toetsen, tips, enz. tussen verschillende scholen, maar het is ook het platform waar docenten uit voortgezet onderwijs en van hbo's en universiteiten elkaar ontmoeten. Zo'n uitwisseling heeft bijvoorbeeld de vorm van periodieke netwerkbijeenkomsten.
- *Conferenties en nascholing*. Enkele steunpunten organiseren jaarlijkse conferenties rondom actuele bovenbouwthema's. Ook zijn er specifieke scholingsbijeenkomsten die uit meerdere bijeenkomsten in een kleinere groep bestaan. Met de komst van nieuwe examenprogramma's in 2015 zal dit geïntensiveerd worden. Denk aan vernieuwde thema's, zoals statistiek of analytische meetkunde voor wiskunde A/C respectievelijk wiskunde B.
- *Docentenontwikkelteams* (*DOTs*). Het betreft hier in feite een combinatie van de bovenste drie punten: een DOT is een groep docenten die intensief met elkaar samenwerken aan vakvernieuwing en materiaalontwikkeling.
- *Leerlingactiviteiten*. Het kan hier gaan om gastlessen van ho-docenten, masterclasses, maar ook om bijeenkomsten op hbo of universiteit. Bij dit laatste gaat het vaak om de aftrap of afsluiting van een bepaalde module.
- *Lesondersteuning*. Dit is een uitgebreidere vorm van het vorige punt. Soms verzorgt een ho-docent wiskundelessen over een langere periode, en soms bundelen docenten van verschillende scholen hun krachten en geven ze in toerbeurt les aan een klas die bestaat uit leerlingen van meerdere scholen. Met name waar de groepsgrootte bij wiskunde D maakt dat het vak voor individuele scholen niet te dragen is, is dit een aantrekkelijke optie. In de uitvoering speelt ICT vaak een belangrijke rol.
- *Vakvoorlichting*. Het betreft hier activiteiten gerelateerd aan de profielkeuze in klas 3, of de studiekeuze in de bovenbouw.
- *Loketfunctie*. Het steunpunt is het aanspreekpunt voor docenten uit het vo naar het ho en vice versa.

De stand van zaken?

De afgelopen jaren was de vernieuwingscommissie wiskunde, cTWO, belast met de ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs op havo en vwo. In haar eindrapport, *Denken & doen*, van januari 2013 (beschikbaar op *www.ctwo.nl* onder 'publicaties') staat een aantal conclusies aangaande de steunpunten. Zo noemt cTWO de zinvolle bijdrage die vervolgopleidingen via de steunpunten leveren: via lesmateriaal, maar ook door het onderhouden van contacten tussen vo en ho. Verder hamert cTWO op het belang van nascholing met het oog op de invoering in 2015 van de nieuwe examenprogramma's.
De universiteiten lopen voorop. Meteen bij de invoering van wiskunde D in 2007 was er bijvoorbeeld al een aanzienlijke hoeveelheid lesmateriaal beschikbaar. De participatie van hogescholen kwam wat trager op gang, mede doordat deze instellingen sterker geïnstitutionaliseerd zijn – en daardoor minder flexibel – en omdat wiskunde vaak geen aparte discipline bij hbo-opleidingen is. Maar de hogescholen zijn bezig met een inhaalslag. In een regionaal steunpunt werken universiteit en hogeschool zo veel mogelijk samen.
Bij wiskunde D heeft een school momenteel de keuze tussen het samenwerkingsmodel en het schoolmodel. Bij het laatste model blijft het vervolgonderwijs buiten beeld. In de voorstellen van cTWO voor 2015 verdwijnt dit onderscheid: de domeinen *Wiskunde in technologie* (havo) en *Wiskunde in wetenschap* (vwo) worden voor alle scholen verplicht. Dit maakt de rol van steunpunten nog prominenter.

Xandra Snoeker van de Radboud Universiteit heeft afgelopen zomer een enquête afgenomen onder bovenbouwdocenten. Een belangrijke bevinding uit dit onderzoek is dat een groot deel van de respondenten nog geen contact met een steunpunt heeft, maar dat men wel behoefte heeft aan ondersteuning middels bijvoorbeeld netwerkbijeenkomsten, inhoudelijke scholing en leerlingactiviteiten. Een verslag van het onderzoek is als bijlage toegevoegd aan het eerder genoemde eindrapport van cTWO.

Met de decharge van cTWO heeft het Platform Wiskunde Nederland (PWN) zich de zorg voor wiskunde D aangetrokken. De SLO, belast met de invoering van de nieuwe examenprogramma's, speelt ook een belangrijke ondersteunende rol. Het PWN heeft meteen de landelijke coördinatie van de steunpunten op zich genomen. Verder zet het PWN de Wiskunde D-dag voort – de eerstkomende is gepland op **vrijdag 7 juni 2013**.

Tot slot is de NVvW haar activiteiten aan het uitbouwen aangaande informatieverstrekking en de platformfunctie voor onderling overleg. De samenwerking met de steunpunten zal in de toekomst hechter worden.

Over de auteur
Theo van den Bogaart is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool Utrecht. Daarnaast werkte hij tot afgelopen jaar voor cTWO als secretaris en als lid van het projectteam.
E-mailadres: *theo.vandenbogaart@hu.nl*

Steunpunten voor wiskunde D

Hieronder staat een overzicht van de steunpunten wiskunde D. De meeste daarvan zijn inmiddels onderdeel van brede regionale steunpunten (RSP), die te vinden zijn op: *www.betasteunpunten.nl* .
Per steunpunt wordt kort aangegeven wat voor activiteiten er worden ondernomen. Het betreft uiteraard een momentopname.

Bètasteunpunt Amsterdam / Its Academy (Universiteit van Amsterdam, Vrije Universiteit, Hogeschool van Amsterdam, Hogeschool Inholland)
In dit steunpunt zijn de afgelopen jaren lesmateriaal en -activiteiten ontwikkeld door de vier participerende ho-instellingen, bijvoorbeeld in de vorm van e-klassen, science labs, masterclasses en leskisten (bolmeetkunde, spirograaf en ellipsbiljart).
Jaarlijks is er de manifestatie *Leve de Wiskunde!* en daaraan wordt dit voorjaar voor het eerst door de UvA en VU gezamenlijk een sterk inhoudelijke nascholing gekoppeld: *Leve de Wiskundeleraar!*
'Bètapartners' is de naam van het netwerk van de vier ho-instellingen en dertig scholen voor voortgezet onderwijs. Het is de denktank voor de Its Academy waarin het vo en ho gezamenlijk streven naar een betere aansluiting tussen vo en ho.
Sommige scholen, bijvoorbeeld rondom Alkmaar, voeren het D-onderwijs gezamenlijk uit.

RSP Brabant–Bètabreed Steunpunt Brainport (TU Eindhoven, Fontys Hogescholen)
Dit steunpunt stelt geschikt lesmateriaal beschikbaar, dat voor een deel zelf is ontwikkeld, en organiseert professionaliseringsbijeenkomsten voor docenten uit het vo. Hierbij gaat het niet alleen om inhoudelijke verdieping, maar ook om het uitwisselen of bespreken van lesmateriaal en didactische methodes. Ieder jaar maken 300 tot 350 leerlingen gebruik van de practica die de TU/e organiseert rondom complexe getallen, cryptologie en geluid.

RSP Brabant–Universiteit van Tilburg
In juni 2012 is er een samenwerkingsverband ontstaan tussen de UvT en acht scholen.
In dat verband worden in vwo-5 door vo-docenten drie modules gezamenlijk verzorgd en door de UvT één over besliskunde en speltheorie. In vwo-6 verzorgt de UvT er drie, onder andere over complexe getallen. Onderdeel van de afspraak is dat het aantal participerende docenten in het schooljaar 2013-2014 toeneemt naar tien. Er is ook ondersteuning bij wiskunde B en er vindt nascholing over D-onderwerpen plaats.

Radboud PUC of Science, HAN College of Technology (Radboud Universiteit Nijmegen, Hogeschool van Arnhem en Nijmegen)
Onderdeel van dit brede regionale bètasteunpunt is het vaksteunpunt wiskunde. Dit steunt scholen bij het geven van wiskunde en brengt docenten in contact met elkaar. Het organiseert jaarlijks twee masterclasses voor leerlingen over wisselende onderwerpen.
De afgelopen jaren zijn topologie, forensische statistiek en de spirograaf aan bod gekomen. Daarnaast zijn de lesmodules 'Astrofysica' en 'Introductie topologie' ontwikkeld. Via de HAN is de havo-module 'Tandwieloverbrengingen' beschikbaar.
Jaarlijks wordt een nascholingsbijeenkomst voor docenten, de *WiskundeDialoog*, georganiseerd. Ook worden gastlessen en begeleiding bij profielwerkstukken aangeboden.
De Radboud Universiteit organiseert verder nog het jaarlijkse *Wiskundetoernooi*. Komend schooljaar zal de ondersteuning op de havo worden uitgebreid.

VO-HO netwerk Noord (Rijksuniversiteit Groningen, Hanzehogeschool, Hogeschool Van Hall Larenstein, NHL Hogeschool, Stenden Hogeschool)
Onder dit netwerk van ho- en vo-instellingen in Noord-Nederland vallen Science LinX (RUG), Aansluitingsnetwerk vo-ho Fryslân (NHL, VHL, Stenden) en Bètasteunpunt Hanze.
Regelmatig vinden er professionaliseringsbijeenkomsten plaats en Science Linx organiseert activiteiten voor leerlingen.
In het project *Doe Wiskunde D met de R-U-G* worden videolessen gemaakt in een poule van vo-docenten uit de regio Groningen.

Bèta Steunpunt Oost (Universiteit Twente, Saxion Hogeschool, Hogeschool Windesheim)
In het steunpunt werken vo-docenten en ho-docenten als gelijkwaardige partners samen. In Twente werken docentontwikkelteams (DOTs) aan lessen via *videoconferencing* en moduleontwikkeling. Een *community of learners* houdt zich bezig met professionaliseringsactiviteiten via *lesson study* van specifieke onderwerpen.
Saxion en Windesheim hebben een havo-hbo-docentennetwerk dat een module 'Wiskunde in Technologie' verzorgt. De inhoud op Saxion is afhankelijk van wat de havo-docenten wensen; op Windesheim is het de module 'Logica'. Bij de module 'Tandwielen' kan een practicum op Saxion gevolgd worden. Docenten participeren deels ook in een DOT. Er worden ook gastcolleges aangeboden.

Bètasteunpunt Utrecht / Junior College Utrecht (Universiteit Utrecht, Hogeschool Utrecht)
Voor docenten wiskunde zijn er professionaliseringsactiviteiten, zoals netwerkbijeenkomsten en nascholing, bijvoorbeeld over statistiek. Jaarlijks is er de conferentie *Bèta onder de Dom*. Tijdens de laatst gehouden conferentie is gestart met het bieden van ondersteuning bij de nieuwe examenprogramma's. In vervolg hierop organiseert het steunpunt een nascholingstraject voor docenten met aandacht voor de toepassingen, contexten en vakverbinding. Verder is in de afgelopen jaren lesmateriaal ontwikkeld, o.a. over problemen oplossen, en uitleggen of gedifferentieerd. Ook wordt in nauwe samenwerking met scholen het zogeheten *U Talent programma* opgezet voor havo (HU) en vwo (UU). Dit talentontwikkelingsprogramma bestaat uit activiteiten zoals DOTs voor wiskundedocenten en leerlingactiviteiten variërend van een 1- of 2-daagse voor de onderbouw tot wiskunde-D onderwijs over bijvoorbeeld complexe stromen van 8 middagen voor 5/6-vwo leerlingen. Er worden ook masterclasses georganiseerd.

Regionaal Steunpunt Zuid-Holland (TU Delft)
In dit steunpunt is lesmateriaal ontwikkeld. Science Centre, lerarenopleiding en aansluitingsafdeling hebben elkaar recent gevonden en men is bezig een samenwerking met scholen te realiseren. Onder de titel *Delft voor Docenten* is er nascholing waarin onder meer B- en D-onderwerpen aan bod komen.

Maastricht University
Er zijn drie keer per jaar netwerkbijeenkomsten voor wiskunde-D docenten uit de regio. Hieraan nemen zo'n negen scholen redelijk trouw deel. Naast het uitwisselen van ervaringen wordt tijdens deze bijeenkomsten meestal ook een lezing gegeven door een staflid van de universiteit of iemand van buiten over onderwerpen die gerelateerd zijn aan wiskunde D – complexe getallen, speltheorie en meetkunde – of over een interessegebied van de spreker ter illustratie van de rol van wiskunde hierin.



De rekentoets van diverse kanten bekeken

[Lonneke Boels]

In de discussie over de rekentoets lopen een aantal zaken door elkaar heen. Allereerst is er discussie over wat de rekentoets zou moeten toetsen. Het blijkt dat niet iedereen onder rekenen of basisvaardigheden rekenen hetzelfde verstaat. Ten tweede is er discussie over de vorm: de digitale afname kent in de huidige vorm nogal wat beperkingen. Is de toets op deze wijze nog wel valide en betrouwbaar? Daarnaast is de vraag of een toets nou wel de juiste oplossing is voor het geconstateerde probleem. Worden de fouten bij de invoering van de basisvorming herhaald bij de invoering van de rekentoets? In het vorige nummer van 'Euclides' schreef Jaap de Jonge daar al over. Maar de hoofdvraag: welk probleem wordt hier nu eigenlijk opgelost, komt vrijwel nergens aan bod. Lonneke Boels wil daar haar licht over laten schijnen in dit artikel.

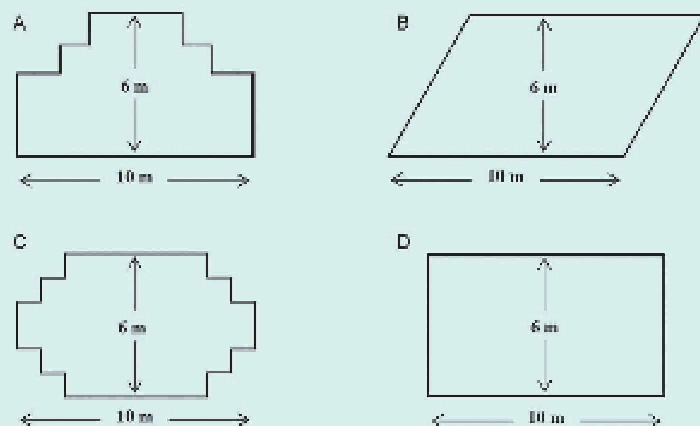
SPREIDING VAN DE PRESTATIES
REKENEN/WISKUNDE

	5% zwakste leerlingen	5% beste leerlingen	verschil
Singapore	464	723	259
Zuid-Korea	489	714	225
Vlaanderen	450	645	195
Finland	430	654	224
Engeland	385	677	292
Nederland	449	623	174
Jemen	74	438	364

figuur 1 De spreiding is in Nederland veel kleiner dan in andere landen. Onze havo-en vwo-leerlingen zijn niet goed in rekenopgaven die niet standaard zijn (bron: [h]).

TIMMERMAN

Vraag 1: TIMMERMAN M266Q01
Een timmerman heeft 32 meter planken en wil daarmee een rand om een bloemperk maken.
Hij overweegt de volgende ontwerpen voor het bloemperk.



figuur 2 Een voorbeeld van een opgave op vaardigheidsniveau 6 (bron: Cito, PISA 2009; zie [5]).
Vraag bij deze opdracht:
Kan met dit ontwerp het bloemperk worden gemaakt met 32 meter planken?
Ontwerp A ja/nee
Ontwerp B ja/nee
Ontwerp C ja/nee
Ontwerp D ja/nee

Zoals al eerder in *Euclides* beschreven presteren we als Nederland internationaal gezien eigenlijk best heel goed op rekenen en wiskunde. Als we kijken naar het PISA-onderzoek uit 2009 [5] onder 15-jarigen of het TIMSS-onderzoek uit 2011 [6] onder leerlingen van groep 6, dan blijkt dat we weliswaar zakken op de ranglijst maar dat volgens de meest recente PPON van groep 8 de daling in niveau tot stilstand lijkt gekomen.[7] Maar wat veel belangrijker is, is dat onze (havo- en) vwo-leerlingen te laag scoren; onze vmbo-leerlingen doen het internationaal gezien juist erg goed. Om dit met een voorbeeld te verduidelijken: in Singapore kan 35,5% van de leerlingen opgaven van het hoogste vaardigheidsniveau volgens PISA maken terwijl dit percentage in Nederland slechts 4,4% is.[5]
Ook in het TIMSS-onderzoek uit 2011, dat onlangs werd gepresenteerd, blijkt dat het grootste probleem zit bij onze best presterende leerlingen. Onze zwakste leerlingen doen het internationaal gezien uitstekend – ruwweg even goed als in Singapore en Vlaanderen – en veel beter dan landen als Engeland en Finland. Het zijn echter onze 5% beste leerlingen die onvoldoende scoren. ***Zie ook figuur 1***.
Hieruit blijkt andermaal het probleem dat we in ons reken- en wiskundeonderwijs moeten oplossen: onze excellente leerlingen krijgen te weinig uitdaging. Onze havo- en vwo-leerlingen dus. Het is dan zinvol om iets preciezer te kijken naar het soort toetsopgaven dat onze excellente leerlingen kennelijk lastig vinden.

Als we de opgaven uit PISA (***zie figuur 2***) en TIMSS naast elkaar leggen, dan valt op dat het opgaven zijn waar je even over moet nadenken. Het zijn geen standaard rekenopgaven als 356 : 23 die je met een standaard methode (staartdeling of herhaald aftrekken) kunt oplossen. Het zijn opgaven waarvoor je logisch moet redeneren. Ze hebben wel iets weg van de Kangoeroe-opgaven. De Kangoeroe is een internationale wiskundewedstrijd bedoeld voor alle kinderen vanaf groep 3 van de basisschool tot en met het eindexamenjaar van de middelbare school. De wedstrijd wordt jaarlijks in maart gehouden.



En daarmee stuiten we direct op het volgende probleem in de discussie: veel wiskundedocenten verstaan onder rekenen iets heel anders dan de opgaven op het hoogste niveau van PISA en TIMSS; ***zie figuur 3 en figuur 4***.

Dus wat wordt er bedoeld met rekenen? Als we de reacties van wiskundedocenten of psychologen lezen in de *WiskundE-brief* of beluisteren op bijeenkomsten van het Steunpunt Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen, dan wordt onder rekenen vooral verstaan: cijferen (bijvoorbeeld de staartdeling), rekenen met breuken en eigenlijk alles wat in het *rapport Meijerink* [3] onder 'paraat hebben' valt. Getallen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen en werken met alle verschijningsvormen van verhoudingen (breuken, procenten, …). Rekenen is in deze visie kale opgaven maken zonder rekenmachine en bij voorkeur zonder papier.
Maar wie het rapport Meijerink goed bestudeerd heeft, heeft gezien dat rekenen veel meer is dan alleen dat. Behalve die 'kale' rekenopgaven moeten leerlingen volgens Meijerink [4] hun rekenvaardigheden functioneel kunnen gebruiken – bijvoorbeeld in het dagelijks leven. In het rapport van Meijerink lezen we bijvoorbeeld bij Getallen 3F: *resultaten van een berekening in termen van de situatie interpreteren, bijv. nagaan of een resultaat van een berekening de juiste orde van grootte heeft en wat de 'foutmarge' is; betekenisvol afronden.*
Met als voorbeeld: *6000 sms-jes in een maand, kan dat?* Het gaat hierbij dus uitdrukkelijk om een praktische situatie waarin een berekening wordt uitgevoerd, niet om een kale opgave.
Het hoogste vaardigheidsniveau heet in Meijerink 'weten waarom' en wordt zowel op praktische rekensituaties toegepast (de F-niveaus) als op abstracte dus de wiskundeniveaus (de S-niveaus). Bij Getallen 2F staat er bijvoorbeeld bij 'weten waarom': *berekeningen en redeneringen verifiëren.* Dat komt dus aardig overeen met wat PISA en TIMSS onder het hoogste vaardigheidsniveau verstaan.

Figuur 4.1.2.1 Korte beschrijvingen van de zes vaardigheidsniveaus bij wiskunde

Niveau	Wat leerlingen op dit niveau kunnen
6	• Conceptualiseren, generaliseren en informatie benutten, gebaseerd op het onderzoek en het modelleren van een complexe probleemstelling • Diverse informatiebronnen en representatievormen met elkaar verbinden en flexibel overstappen van de een op de ander • Op hoog wiskundig niveau denken en redeneren • Dit inzicht en begrip samen met symbolische en formele wiskundige operaties en verbanden inzetten om nieuwe aanpakken of strategieën te ontwikkelen om ongebruikelijke situaties aan te pakken • Zijn bevindingen, interpretaties en argumenten rond zijn handelingen en overdenkingen en tevens de geschiktheid hiervan met betrekking tot de oorspronkelijke situatie formuleren en helder communiceren

figuur 3 Kader vaardigheidsniveau 6 (bron: [5])

VOORBEELDOPGAVE OP HET GEAVANCEERDE NIVEAU
REKENEN/WISKUNDE

Bij een voetbalwedstrijd krijgt een team:

3 punten als ze winnen
1 punt als ze gelijk spelen
0 punten als ze verliezen

Zedland heeft 11 punten gehaald.

Wat is het **kleinste** aantal wedstrijden dat Zedland gespeeld kan hebben?

NL: 36%

Internationaal gemiddeld percentage correct: 27%
Inhoudelijk domein: Getallen
Cognitief domein: Redeneren

UNIVERSITEIT TWENTE.

figuur 4 Bij TIMSS zijn er vier vaardigheidsniveaus. Dit voorbeeld van een opgave op het hoogste niveau voor groep 6 gaat over voetbal. Nederland doet het ook hier internationaal gezien goed (36% goed tegen internationaal 27%), maar blijft hier ver achter bij de landen die in de top staan (bron: [7]).

Natuurlijk lezen we ook in het rapport Meijerink dat leerlingen basisvaardigheden rekenen missen. Maar anders dan veel wiskundedocenten denken, gaat het hier niet over breuken, verhoudingen en procenten. Allereerst wordt hier gedoeld op de leerlingen in groep 6 die achterblijven omdat ze de vaardigheden van groep 3 en 4 (basisvaardigheden rekenen!) nog onvoldoende onder de knie hebben. Dit wordt in groep 5/6 onvoldoende onderkend waardoor deze leerlingen nog verder achterop dreigen te raken. Het gaat dan bijvoorbeeld om het zonder nadenken weten dat 8 + 5 = 13 en dat 17 – 9 = 8 of dat 3 × 6 = 18. Verder geeft Meijerink aan dat met name de herleidingen in het metrieke stelsel slecht gekend zijn en dat de bewerkingen met getallen achteruit gingen. Tot slot geeft Meijerink aan dat de onderbouw van havo/vwo niet goed aansluit bij het rekenen van de basisschool en dat er 'niet systematisch wordt gewerkt aan het onderhouden en uitbreiden van de verworven kennis en vaardigheden op het gebied van het rekenen'.[3]

Doordat er verschillende interpretaties zijn over wat rekenen inhoudt, is er nu bovendien een *Concept-rekentoetswijzer 3S*[8] ontwikkeld die hoofdzakelijk de laagste vaardigheidsniveaus volgens TIMSS en PISA omvat. Deze rekentoetswijzer bevat bovendien voornamelijk opgaven van het 1S-niveau of soms 2S binnen zeer beperkte domeinen. Het 3S-niveau ontbreekt! De naam is wat dat betreft misleidend. De opgaven zijn lastiger gemaakt door flink wat vervelend en nutteloos rekenwerk toe te voegen. Bij een digitale toetsing op uitsluitend het eindantwoord vormt dat een extra groot probleem voor de betrouwbaarheid van de toets. De voorstellen uit de rekentoetswijzer 3S zijn hiermee feitelijk gemakkelijker dan de 3F-rekentoets die in 2012 op het mbo is afgenomen. Daarmee wordt de beoogde niveauverhoging dus niet gehaald en dreigt de facto een niveauverlaging.

Naast al deze discussies over inhoud speelt ook een stevige discussie over de huidige vorm van de rekentoets. De oorzaak van deze discussie kan kort worden samengevat: de huidige vorm voldoet niet aan een aantal basale kwaliteitseisen die docenten (en het Cito!) stellen aan toetsen (zie [1] en [2]). De huidige vorm kent een aantal grote nadelen:

- leerlingen kunnen niet terugbladeren;
- alleen het antwoord telt. Hierdoor wordt geen onderscheid gemaakt tussen rekenfouten en niet kunnen rekenen. Dit telt extra zwaar als er veel reken- of denkstappen in de opgave zitten;
- leerlingen kunnen de vragen en hun antwoorden achteraf niet inzien;
- de docenten kunnen de vragen en antwoorden ook achteraf niet inzien;
- de vragen blijven geheim op één voorbeeldset na;
- er is geen openbaar correctievoorschrift op één voorbeeldset na;
- digitale vaardigheden zijn van invloed op het resultaat;

Een willekeurig voorbeeld – Een leerling van mijn school haalde een onvoldoende op de pilottoets. Achteraf bleek bij de digitale rekenlessen dat ze voor alle getallen het numerieke gedeelte van het toetsenbord had gebruikt, inclusief het gebruik van de punt als komma. Veel computerprogramma's corrigeren dit automatisch dus daar ging deze leerling van uit. Overigens lijkt dit probleem in de nieuwe versie van Examentester opgelost.

- de vorm en lay-out van de rekenmachine op het beeldscherm zijn van invloed op het resultaat;
- er moeten ongeveer 60 vragen in 120 minuten worden gemaakt;
- na dit pilotjaar hebben leerlingen voortaan nog slechts één herkansing.

Al deze factoren hebben een negatieve invloed op de vier kwaliteitseisen die wij aan toetsen stellen: betrouwbaarheid, validiteit, aanvaardbaarheid en transparantie van de toets [1]. Zo schrijft Kennisnet hier bijvoorbeeld over, verwijzend naar het Cito: 'Het is belangrijk dat een toets niet ontaardt in een "race tegen de klok"' en '… dient een toets ook voor betrokkenen "doorzichtig" te zijn ten aanzien van: het kiezen van de te volgen strategie tijdens de voorbereiding, beoordeling en waardering van de toetsresultaten (correctievoorschriften en de procedure voor de bepaling van het cijfer).' De overheid heeft er daarom zeer verstandig aan gedaan om de resultaten van de rekentoets nog niet mee te laten tellen in de slaag/zakregeling. Het is voorlopig namelijk nog maar zeer de vraag wat deze rekentoets nu eigenlijk toetst, en of dat nu wel het juiste is. Alleen was de timing van het uitstel wel bijzonder ongelukkig: vlak nadat veel scholen veel geld, tijd en moeite hadden gestoken in computertesten voor de pilot en het uitvoeren van noodreparaties (lees: extra rekenlessen voor 3-vmbo, 4-havo en 5-vwo). Als het uitstel van de slaag/zakregeling al voor de zomervakantie bekend was gemaakt, had heel wat onderwijsgeld doelmatiger besteed kunnen worden.
Maar laten we ook hand in eigen boezem steken: zonder deze rekentoets had waarschijnlijk nog steeds vrijwel geen enkele wiskundedocent van het Referentiekader Rekenen gehoord, laat staan geweten wat er in staat. Dus denken dat we zonder een rekentoets ook wel ons onderwijs hadden aangepast, is in mijn ogen iets te optimistisch.

Noten

[1] Zie: *http://toetswijzer.kennisnet.nl/html/toetsconstructie/kwaliteit.htm*
[2] Zie: *www.cito.nl/static/oenw/ttb/beglist1.htm#top*
[3] H. Meijerink e.a (2008): *Over de drempels met taal en rekenen.* Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen. Digitaal beschikbaar via: *www.taalenrekenen.nl/downloads/over-de-drempels-hoofdrapport.pdf*
[4] H. Meijerink e.a (2009). *Een nadere beschouwing.* Zie: *www.taalenrekenen.nl/referentiekader/achtergrond/bijstelopdracht/*
[5] PISA 2009. Zie: *www.cito.nl/nl/onderzoek%20en%20wetenschap/onderzoek/deelname_onderzoek/pisa.aspx*
[6] TIMSS 2011. Zie: *www.utwente.nl/gw/timssenpirls/nieuws/Resultaten%20TIMSS%20en%20PIRLS/*
[7] Zie ook de Panama-website (31e Panama conferentie): *www.fisme.science.uu.nl/panama/*
[8] Zie: *www.slo.nl/downloads/documenten/Conceptrekentoetswijzer-3s.pdf*

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft, docent vakdidactiek rekenen op de Haagse Hogeschool en directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen.
E-mailadres: *L.Boels@alaka.nl*

Uitdagende problemen

AAN SET

[Jacques Jansen]

'Set' is niet alleen een gezellig kaartspel maar het herbergt tal van wiskundige raadsels. Een idee voor de laatste lessen vlak voor een vakantie maar ook zeer geschikt als praktische opdracht in bovenbouw havo of vwo. Voor de docent ligt er een volgende uitdaging. Een kaart is op te vatten als een vector van vier variabelen. Hoe kun je nu met behulp van vectoren vanuit een hoger standpunt het spel doorzien?

'Set!' wordt er door de klas geschreeuwd. Het geluid komt van een tafel waaraan twee jongens en twee meisjes het kaartspel 'Set' spelen. Maar, wie schreeuwde er eigenlijk? De kans is groot dat het één van de twee meisjes was. Merkwaardig maar toch, het zijn de meiden die de meeste 'sets' scoren. En juist dat verschijnsel gaan we in dit artikel niet bespreken. Wel de wiskundige kant van Set, voornamelijk combinatoriek en wat kansrekening. Ook kun je op een hele abstracte wijze naar Set kijken, met vectoren. Dat komt mooi uit als voorbereiding op het nieuwe programma voor vwo wiskunde B.

Geschiedenis van Set

Set is een kaartspel afkomstig uit de Verenigde Staten. Het is ontworpen door Marsha Falco. Zij werkte als populatiegeneticus in Cambridge (Engeland) en deed onderzoek naar epilepsie bij Duitse herders. Voor haar studie gebruikte zij genetische symbolen die ze op kaarten zette. Enkele dierenartsen, die over haar schouder meekeken, zagen de sets. Het spel werd voor het eerst uitgegeven door Set Enterprises in 1991 en is nu in bijna elke speelgoedwinkel verkrijgbaar voor een prijs van niet meer dan 13 euro; zie ook [1].

Wat is een Set?

Eerst dit. Het spel bestaat uit 81 kaarten (***zie foto 1***). Elke kaart heeft *vier*

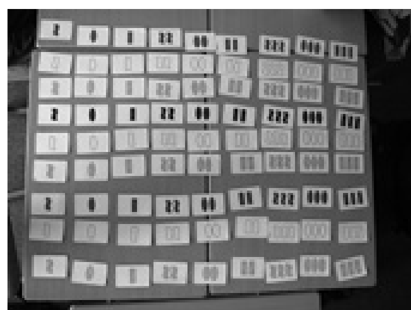
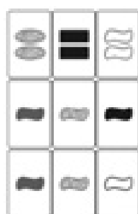


foto 1

eigenschappen. Bij elke eigenschap horen precies *drie* mogelijkheden.

- **Kleur**: elke kaart is rood, groen of paars.
- **Aantal**: op elke kaart staan één, twee of drie figuurtjes.
- **Vorm**: op elke kaart staan ovale, rechthoekige of geslingerde figuurtjes.
- **Invulling**: de figuren op elke kaart zijn helemaal ingekleurd, niet ingekleurd of gestippeld.

Een Set bestaat uit drie kaarten waarbij elke eigenschap in een Set bij elk van de drie kaarten óf helemaal hetzelfde is óf compleet verschillend is. Een Set kan drie, twee, een of nul eigenschappen gelijk hebben. Een paar voorbeelden:



Dit is **wel** een Set: de kleur is verschillend, het aantal figuurtjes is hetzelfde, de vorm is verschillend en de invulling is verschillend .

Dit is **geen** Set: twee kaarten zijn volledig ingevuld, en eentje is gestippeld (de middelste). Ze zijn qua invulling dus niet verschillend maar ook niet hetzelfde.

Dit is **wel** een Set: de kleur is verschillend, het aantal is gelijk , de vorm is gelijk en de invulling is verschillend

Drie kaarten vormen ook een Set wanneer alle eigenschappen verschillend zijn, dus én een andere kleur, én een ander aantal, én een andere vorm én een andere invulling. Er hoeft dus niet minstens één eigenschap hetzelfde te zijn; alles verschillend mag dus ook.

Doel van het spel

De bedoeling is om zo snel mogelijk een Set aan te wijzen. Vormen de drie kaarten inderdaad een Set, dan zijn die drie kaarten voor de speler die ze gevonden heeft. Vormen de drie kaarten geen Set, dan heeft de speler zich vergist en mag deze even niet meer meespelen tot een andere speler een Set gevonden heeft.

Spelregels

Normaal gesproken speel je het aan tafel met ten minste twee personen. Dan ga je als volgt te werk.

1. Verzamel een paar mensen rond een tafel en kies een spelleider.
2. De spelleider legt 12 kaarten op tafel in een rechthoek van 3 × 4.
3. Iemand die een Set ziet, roept: 'Set!'
4. De spelleider bepaalt wie als eerste geroepen heeft. Deze speler mag dan de drie kaarten aanwijzen die volgens hem of haar een Set vormen.
5. De overige spelers controleren of deze drie kaarten inderdaad een Set vormen. Pas als dit zo is, mogen de drie kaarten weggehaald worden. Het spel gaat verder met de overgebleven kaarten (of het aantal wordt steeds aangevuld tot 12). Vormen de kaarten geen Set, dan blijven de kaarten liggen en mag de speler tijdelijk niet meedoen totdat een andere speler een goede Set gevonden heeft.
6. Als in de kaarten op tafel niemand een Set ziet, vult de spelleider de kaarten aan met drie extra kaarten.
7. Het spel is afgelopen als alle kaarten op zijn en er in de kaarten op tafel geen Set meer zit. Winnaar is degene met de meeste Sets.

Hoe in de klas te beginnen?

Eerste les. Verdeel de klas in groepjes van vier en laat de leerlingen één les lang Set spelen. Het is van groot belang om goed door te krijgen wat een Set is.
Tip. Houd als docent de scores bij met behulp van bijvoorbeeld een Excel-rekenblad.
Begin de tweede les met de volgende vraag aan de leerlingen: 'Wat zou je wiskundig gezien willen weten van dit kaartspel?' Geef leerlingen ruim de tijd om een aantal vragen te bedenken. Vervolgens kunnen de vragen geïnventariseerd en gesorteerd worden. Dan wordt het tijd om de volgende vijftien vragen aan te bieden en te vergelijken met de vragen die de leerlingen zelf bedacht hebben. Dan kan het onderzoek beginnen. Daar is een aantal lessen voor nodig dat afgerond kan worden met presentaties.

Vijftien vragen voor de leerlingen

1. Hoeveel kaarten van een bepaalde kleur zitten er in het spel? En hoeveel van een vorm? Et cetera (aantal, invulling).
2. Beredeneer nu waarom het kaartspel precies 81 kaarten bevat.
3. Beschrijf op een vergelijkbare manier een spel kaarten met drie, in plaats van vier eigenschappen (maar wél met drie verschijningsvormen). Dus bijvoorbeeld alleen kleur, vorm en aantal. Doe hetzelfde voor een spel kaarten met vijf eigenschappen.
4. Trek blind een willekeurige Setkaart (uit het originele spel) en gok hoe de kaart er uit ziet. Wat is de kans dat je nul eigenschappen goed hebt? Of juist één? Of twee? Of drie?
5. Bewijs dat bij een gegeven tweetal kaarten altijd precies één unieke derde kaart bestaat om een Set te vormen.
6. Gegeven zijn twee Sets. Bewijs dat deze Sets of geen enkele kaart gemeenschappelijk hebben, of één kaart gemeenschappelijk hebben, of drie kaarten gemeenschappelijk hebben.
7. Tot hoeveel Sets behoort een enkele kaart?
8. Bereken nu hoeveel Sets er in het gehele spel zitten.
9. Vind en teken 9 kaarten zonder een Set.
10. Vind 9 kaarten met 1, 2, 3, … Sets
11. Wat is het maximale aantal Sets in 9 kaarten?
12. Vind 12 kaarten zonder Set. Zelfde vraag voor 16, 17, 18, 19 en 20 kaarten.
13. Hoeveel kaarten kun je maximaal op tafel leggen zonder dat er een Set in zit?
14. Wat is de kans dat drie willekeurige kaarten een Set vormen?
15. Hoe groot is de kans dat er in 12 kaarten geen Set zit?

Leerlingen aan het werk

In verschillende leerjaren, soms samen met andere collega's, zijn we met het onderzoek bezig geweest. Steeds zijn leerlingen enthousiast bezig met het onderzoek en blijkt de smartphone een welkom hulpmiddel. Vaardigheden zoals redeneren, bewijzen, onderzoeken komen aan de orde. Interessant wordt het natuurlijk als we bij de werkwijze van de leerlingen verschillende strategieën zien.
En wat te denken van vraag 15. Mag je zo'n bijna onmogelijke vraag stellen?

Uitwerking groep Jaïr
Vraag 9: 9 kaarten zonder Set leggen

- *Je zou willekeurig kaarten kunnen gaan neerleggen en dan kijken of er geen Set tussen zit.*
- *Maar wij hebben een makkelijkere manier gevonden. Je pakt twee kaarten. Bij die kaarten hoort een kaart die er niet meer bij gelegd kan worden deze unieke kaart leg je dus weg en zo ga je net zo lang door totdat je 9 kaarten hebt*
- *Zie het resultaat **in foto 2**.*

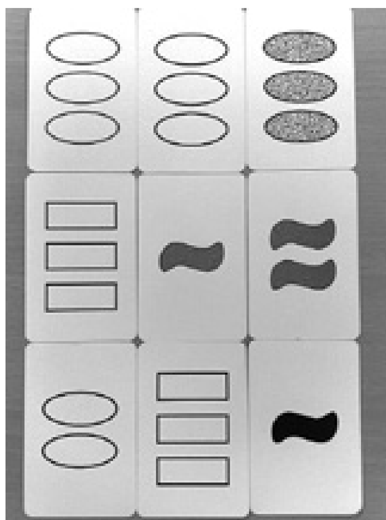


foto 2

Terugblik van havist Jeroen op het onderzoek
Ik vond het leuk om er aan te werken, je ziet dat de theorie die we tijdens de lessen hebben gehad ook echt is en hoe het eigenlijk in elkaar steekt.
Dat maakt de wiskunde dus ook interessant als je ziet hoe het echt werkt. Ook zat er uitdaging aan het werkstuk, wat het altijd leuker maakt want ik was na een tijdje echt nieuwsgierig hoe het in elkaar steekt en dat was echt leuk. Ook ben je met een spel bezig dat erg wiskundig is en dat laat ook zien dat wiskunde niet saai is zoals sommige mensen beweren.

Uitwerking van vraag 11 van groep Jair
Wat is het maximale aantal Sets in 9 kaarten?

- *Met iedere kaart kun je vier Sets vormen. Er liggen 9 kaarten op de tafel dus 9 · 4 = 36.*
- *Dit getal moet je door 3 delen want je vormt een Set met 3 kaarten, dus tel je elke Set 3 keer mee. 36 : 3 = 12. Dus er zitten maximaal 12 Sets in een kaartspel.*
- *Zoals je kunt zien is dat bij de gegeven kaarten **in foto 3** het geval.*

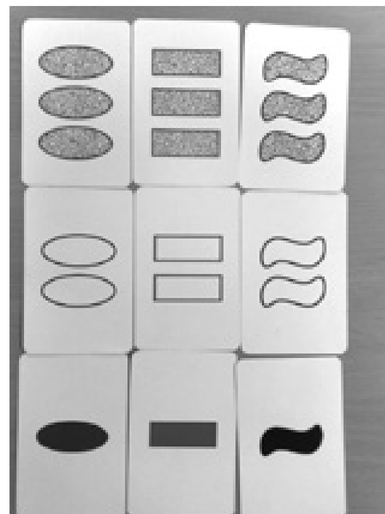


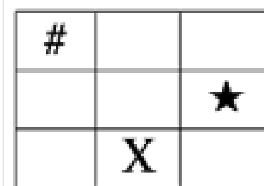
foto 3

Naschrift docent – Bij een keuze van een kaart blijven acht kaarten over die we verdelen in vier tweetallen waarmee we met de gekozen kaart vier sets kunnen maken.

Overzicht van de 12 Sets

Set 1: 1, 2, 3	Set 2: 1, 5, 9
Set 3: 1, 4, 7	Set 4: 1, 6, 8
Set 5: 2, 5, 8	Set 6: 2, 4, 9
Set 7: 2, 6, 7	Set 8: 3, 4, 8
Set 9: 3, 5, 7	Set 10: 3, 6, 9
Set 11: 4, 5, 6	Set 12: 7, 8, 9

Een andere uitwerking bij groep Jeroen



Zorg dat rijen, kolommen en diagonalen Sets vormen (8) en breidt dat uit met vier types van de bovenstaande vorm.

Of een 'slimme' oplossing bij groep Lilly

- *Laat twee eigenschappen (dimensies) weg; bijvoorbeeld 'kleur' en 'aantal' vast kiezen: 9 kaarten*
- *Aantal Sets:* $\frac{9\times8\times1}{3!}=12$

Met vectoren naar Set kijken

Aad Goddijn, medewerker voortgezet onderwijs bij het Freudenthal Instituut, wees mij ooit op dit andere standpunt. Ik wil u dit niet onthouden.
Elke eigenschap van een kaart heeft drie mogelijkheden die we steeds aangeven met de waarden 0, 1 of 2.
Een kaart kun je opvatten als een vector van vier variabelen (a, b, c, d) waarbij de variabele (coördinaat) een getal is uit het drietallig stelsel. We werken (spelen) dus in de ruimte $(F_3)^4$ waarbij $F_3 = \{0, 1, 2\}$. We kiezen twee willekeurige vectoren uit en kijken welke voorwaarde nodig is om met een derde vector een Set te vormen. We illustreren het aan een voorbeeld.
We nemen de volgende vectoren: $\boldsymbol{k}_1 = (0, 2, 1, 1)$ en $\boldsymbol{k}_2 = (1, 2, 2, 1)$. We willen met een derde vector $\boldsymbol{k}_3 = (a, b, c, d)$ een Set vormen.
Merk op dat de eerste en derde coördinaten van $\boldsymbol{k}_1$ en $\boldsymbol{k}_2$ verschillend zijn. Om een Set te vormen moeten de eerste en derde coördinaat van $\boldsymbol{k}_3$ anders zijn dan bij de twee gegeven vectoren. De waarden liggen dus vast, en zijn respectievelijk 2 en 0.
Echter de tweede en vierde coördinaat van $\boldsymbol{k}_1$ en $\boldsymbol{k}_2$ zijn hetzelfde. Om een Set te vormen moeten de tweede en vierde coördinaat van $\boldsymbol{k}_3$ ook niet anders zijn dan bij de twee gegeven vectoren. Deze waarden liggen dus ook vast, en zijn respectievelijk 2 en 1; zie onderstaande tabel.

coördinaat	a	b	c	d
$\boldsymbol{k}_1$	0	2	1	1
$\boldsymbol{k}_2$	1	2	2	1
$\boldsymbol{k}_3$	2	2	0	1
coördinatensom in 3-tallig stelsel	0	0	0	0

Er geldt dat drie verschillende vectoren $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, en $\boldsymbol{k}_3$ een Set vormen als:
$$\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{0}$$
De derde vector is als een lineaire combinatie te schrijven van de eerste twee. De drie bijbehorende punten liggen op één en dezelfde lijn. Een Set is in onze ruimte een lijn. Met deze kennis van zaken kunt u ook enkele van de vragen beantwoorden. Geeft u maar eens de bewijzen bij de vragen 5 en 6.
Meer weten over dit andere standpunt? Zie dan het artikel van professor N.G. de Bruijn in het *Nieuw Archief voor Wiskunde*.[2]

Met havo-leerlingen naar de TU/e?

Een paar jaar geleden ben ik met drie havisten naar de TU/e gegaan voor een workshop ‘Set spelen’ in het kader van wiskunde D. Deze middag werd georganiseerd door de kerngroep wiskunde D verbonden aan het steunpunt wiskunde D Eindhoven van de Technische Universiteit.

Tot slot

Op internet kunt u mogelijke antwoorden vinden op vraag 15. Dat zullen de leerlingen ook doen. De vraag is wat de kwaliteit van die antwoorden is.
U bent nu *aan Set*. Ik wens u en de leerlingen veel spelplezier.



foto 4 Havisten met wiskunde D van het Strabrecht College worden ingezet om wiskundedocenten te helpen het kaartspel Set eigen te maken.

Bronnen

[1] Tijdschrift *Pythagoras*, december 1999. Digitaal: *www.pythagoras.nu/pyth/nummer.php?id=238*

[2] N.G. de Bruijn (2002): *Set!* In: *Nieuw Archief voor Wiskunde*, serie 5, deel 3, nr. 4 (december 2002); pp. 320-325. Digitaal: *www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2002-03-4-320.pdf*

Internetsites

- *www.Setgame.com*

Op de volgende website kun je het spel in je eentje oefenen (Java gestuurd):

- *www.tammo80.nl/java/set/*

Over de auteur

Jacques Jansen was 35 jaar docent wiskunde aan het Strabrecht College te Geldrop. Hij is sinds 1 september 2012 met fpu.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl*

Formules voor de exacte waarden van cos(kπ/17)

[Kees Jonkers]

Inleiding

Zoals bekend kunnen van bepaalde hoeken de cosinuswaarden *exact* berekend worden. Eenvoudige voorbeelden hiervan zijn: $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$.
Bij het onderzoek naar de exacte waarden van cos(kπ/17) is de beroemde wiskundige Carl Friedrich Gauss (1777-1855) onze eerste bron. In zijn *Disquisitiones Arithmeticae* (1801) vermeldt hij de volgende formule:

$$\cos\frac{2\pi}{17} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$$



Portret van Carl Friedrich Gauss (1840) / Olieverfschilderij (detail) door C.A. Jensen (1792-1870) / Bron: Wikipedia

Heinrich Tietze (1880-1964) heeft in zijn boek *Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit* (1959) geprobeerd deze formule van Gauss iets meer structuur te geven. Hij geeft de formule:

$$\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{c + d\sqrt{e} - 2\sqrt{f}} + d + \frac{1}{2}\sqrt{e}\right)$$

met $c = \frac{1}{4}(17+3\sqrt{17})$, $d = \frac{1}{4}(\sqrt{17}-1)$, $e = \frac{1}{2}(17-\sqrt{17})$ en $f = \frac{1}{2}(17+\sqrt{17})$.

Deze formule is door *vier* substituties uit te voeren in overeenstemming te brengen met de formule van Gauss.
In dit artikel worden formules gevonden waarin men met slechts **twee** substituties hetzelfde resultaat kan bereiken.

Goniometrische relaties

Voor het uitvoeren van de berekeningen van cos(kπ/17), waarin k een willekeurig geheel getal is, mogen we ons beperken tot $1 \le k \le 8$.
Voor grotere waarden van k maken we gebruik van de formule:

$$\cos\left(\frac{17-k}{17}\pi\right) = -\cos\frac{k\cdot\pi}{17}$$

Stellen we $c_k = \cos\frac{k\cdot\pi}{17}$, dan zal dus gelden: $c_9 = -c_8$, $c_{10} = -c_7$, …
Om de waarden van c_k te kunnen berekenen bewijzen we eerst drie goniometrische relaties.

(1)… $c_1 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot c_8 = c_3 \cdot c_5 \cdot c_6 \cdot c_7 = \frac{1}{16}$

(2)… $-c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - c_5 + c_6 - c_7 + c_8 = -\frac{1}{2}$

(3)… $(c_1 - c_2 - c_4 - c_8)(c_3 + c_5 - c_6 + c_7) = -1$

Bewijs van (1) – Met de bekende formule $\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$ vinden we:

$$\cos\frac{\pi}{17}\cdot\cos\frac{2\pi}{17}\cdot\cos\frac{4\pi}{17}\cdot\cos\frac{8\pi}{17} = \frac{\sin\frac{2\pi}{17}}{2\sin\frac{\pi}{17}}\cdot\frac{\sin\frac{4\pi}{17}}{2\sin\frac{2\pi}{17}}\cdot\frac{\sin\frac{8\pi}{17}}{2\sin\frac{4\pi}{17}}\cdot\frac{\sin\frac{16\pi}{17}}{2\sin\frac{8\pi}{17}} =$$
$$= \frac{\sin\frac{16\pi}{17}}{16\sin\frac{\pi}{17}} = \frac{1}{16}$$

Bewezen is dus dat $c_1 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot c_8 = \frac{1}{16}$.
Als we dezelfde formule nog eens toepassen voor een hoek die drie maal zo groot is, komt er voor een zekere hoek α:

$$\cos 3\alpha \cdot \cos 6\alpha \cdot \cos 12\alpha \cdot \cos 24\alpha = \frac{\sin 48\alpha}{16\sin 3\alpha}$$

Neem nu $\alpha = \frac{\pi}{17}$ en bedenk dat:

$$\sin\frac{48\pi}{17} = \sin\frac{14\pi}{17} = \sin\frac{3\pi}{17}, \quad \cos\frac{12\pi}{17} = -\cos\frac{5\pi}{17} \text{ en } \cos\frac{24\pi}{17} = -\cos\frac{7\pi}{17}$$

Dan blijkt dat ook $c_3 \cdot c_5 \cdot c_6 \cdot c_7 = \frac{1}{16}$.

Bewijs van (2) – We zullen in dit bewijs vaak de volgende formule gebruiken:
(*)… $c_k + c_l = 2 \cdot c_{½(l-k)} \cdot c_{½(l+k)}$ (voor $k < l$)

De juistheid van (*) berust op de formule
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cdot\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$; en neem hierin dan

$\alpha = \frac{l\cdot\pi}{17}$ en $\beta = \frac{k\cdot\pi}{17}$.

We herleiden met behulp van (*):

$$\begin{aligned}
-c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - c_5 + c_6 - c_7 + c_8 &= \\
&= -(c_1 + c_3) - (c_5 + c_7) + (c_2 + c_4) + (c_6 + c_8) = \\
&= -2c_1c_2 - 2c_1c_6 + 2c_1c_3 + 2c_1c_7 = \\
&= 2c_1(-c_2 - c_6 + c_3 + c_7) = 2c_1(c_{15} + c_{11} + c_3 + c_7) = 2c_1(2c_2c_{13} + 2c_2c_5) = \\
&= 4c_1c_2(c_{13} + c_5) = 8c_1c_2(c_4c_9) = \\
&= -8c_1c_2c_4c_8 = \text{ zie relatie (1) } \quad -8\cdot\left(\frac{1}{16}\right) = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Bewijs van (3) – Bij het uitvermenigvuldigen van het linker lid van relatie (3) ontstaan 16 termen van de vorm $c_i \cdot c_j$.
Elk van deze termen kan volgens (*) geschreven worden als een som.
Bijvoorbeeld $c_2 \cdot c_3 = \frac{1}{2}(c_1 + c_5)$. En gebruik ook: $c_9 = -c_8$, $c_{10} = -c_7$, …
Er komt uiteindelijk:

$$2(-c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - c_5 + c_6 - c_7 + c_8) = \text{ zie relatie (2) } \quad 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

Berekeningen

We zullen nu de 8 *onbekende getallen* $c_1 = \cos\frac{\pi}{17}$, $c_2 = \cos\frac{2\pi}{17}$, …, $c_8 = \cos\frac{8\pi}{17}$ berekenen.
We stellen daarbij $\boldsymbol{p} = c_2 + c_8 = 2c_3c_5$ en $\boldsymbol{q} = c_3 + c_5 = 2c_1c_4$.

1. Berekening van p en q – Stelt men $a = c_1 - c_2 - c_4 - c_8$ en $b = c_3 + c_5 - c_6 + c_7$, dan volgt uit de relaties (1) en (2) dat $a + b = \frac{1}{2}$ en $a \cdot b = -1$.
a en b zijn dus de wortels van de vergelijking $2x^2 - x - 2 = 0$.
a is eenvoudig te vinden door de *kleinste* wortel van deze vergelijking te kiezen.
Men vindt: $a = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{17})$; voor de *grootste* wortel b vinden we: $b = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{17})$.
Vóór we de waarde van p kunnen vinden maken we eerst nog een kleine tussenstap.
Stel $u = -c_1 + c_4 = c_{16} + c_4 = 2c_{10}c_6 = -2c_7c_6$.
Er geldt:

- $p + u = c_2 + c_8 - c_1 + c_4 = -a$
- $p \cdot u = (2c_3c_5)(-2c_7c_6) = -4c_3c_5c_6c_7 =$ zie relatie (1) $-4 \cdot \frac{1}{16} = -\frac{1}{4}$

p en u zijn dus de wortels van de vergelijking $x^2 + ax - \frac{1}{4} = 0$. Met $a = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{17})$ wordt dit: $x^2 + \frac{1}{4}(1 - \sqrt{17})x - \frac{1}{4} = 0$.

Voor de *grootste* wortel p van deze vergelijking vinden we dan:

$$\boldsymbol{p} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$$

Stel vervolgens $v = -c_6 + c_7 = c_{11} + c_7 = 2c_2c_9 = -2c_2c_8$.
Er geldt:

- $q + v = c_3 + c_5 - c_6 + c_7 = b$
- $q \cdot v = (c_3 + c_5) \cdot v = (2c_1c_4) \cdot (-2c_2c_8) = -4c_1c_2c_4c_8 =$ zie relatie (1) $-4 \cdot \frac{1}{16} = -\frac{1}{4}$

q en v zijn dus de wortels van de vergelijking $x^2 - bx - \frac{1}{4} = 0$. Met $b = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{17})$ wordt dit: $x^2 - \frac{1}{4}(1 + \sqrt{17})x - \frac{1}{4} = 0$.
Voor de *grootste* wortel q hiervan vinden we dus:

$$\boldsymbol{q} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}$$

2. Berekening van c_1 en c_4 – Bij de berekening van p is gevonden: $(c_2 + c_8)(-c_1 + c_4) = -\frac{1}{4}$, zodat: $-c_1 + c_4 = -\frac{1}{4p}$
En uit $q = 2c_1c_4$ volgt: $(-c_1)c_4 = -\frac{1}{2}q$.
$(-c_1)$ en c_4 zijn dus de wortels van de vergelijking $x^2 + \frac{1}{4p}x - \frac{1}{2}q = 0$.
$(-c_1)$ is de *kleinste* wortel van deze vergelijking. We vinden:

$$-c_1 = -\frac{1}{8p} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{16p^2} + 2q}\text{, zodat } c_1 = \frac{1}{8p}\left(1 + \sqrt{1 + 32p^2q}\right)$$

Voor de *grootste* wortel c_4 volgt dan:

$$c_4 = \frac{1}{8p}\left(-1 + \sqrt{1 + 32p^2q}\right)$$

3. Berekening van c_2 en c_8 – Bij de berekening van c_1 en c_4 vonden we $c_1c_4 = \frac{1}{2}q$.

Uit $c_1c_2c_4c_8 = \frac{1}{16}$ volgt $c_2c_8 = \frac{1}{16c_1c_4} = \frac{1}{8q}$.

Wegens $p = c_2 + c_8$ zijn c_2 en c_8 de wortels van de vergelijking $x^2 - px + \frac{1}{8q} = 0$.
Nu volgt eenvoudig:

$$c_2 = \frac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 - \frac{1}{2q}}\right) \text{ en } c_8 = \frac{1}{2}\left(p - \sqrt{p^2 - \frac{1}{2q}}\right)$$

4. Berekening van c_3 en c_5 – We kunnen nu snel de waarden van c_3 en c_5 vinden.
Uit $p = 2c_3c_5$ volgt $c_3c_5 = \frac{1}{2}p$.
Wegens $c_3 + c_5 = q$ zijn c_3 en c_5 de wortels van de vergelijking $x^2 - qx + \frac{1}{2}p = 0$.
c_3 is de grootste wortel. Dus volgt nu eenvoudig:

$$c_3 = \frac{1}{2}\left(q + \sqrt{q^2 - 2p}\right) \text{ en } c_5 = \frac{1}{2}\left(q - \sqrt{q^2 - 2p}\right)$$

5. Berekening van c_6 en c_7 – Uit relatie (1) volgt $-c_6c_7 = \frac{-1}{16c_3c_5}$.
Er geldt ook: $p = 2c_3c_5$, zodat $c_3c_5 = \frac{1}{2}p$ en dus is:

$$-c_6c_7 = c_6 \cdot (-c_7) = \frac{-1}{16 \cdot (\frac{1}{2}p)} = \frac{-1}{8p}.$$

Verder:
$c_6 + (-c_7) = c_6 + c_{10} = 2c_2c_8 =$ zie berekening 3 $2 \cdot \frac{1}{8q} = \frac{1}{4q}$

c_6 en $(-c_7)$ zijn dus de wortels van de vergelijking

$$x^2 - \frac{1}{4q}x - \frac{1}{8p} = 0.$$

Door deze vergelijking op te lossen en de *grootste* wortel te nemen volgt:
$c_6 = \frac{1}{8q}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8q^2}{p}}\right)$. De andere wortel leidt tot
$c_7 = \frac{1}{8q}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8q^2}{p}}\right)$.

Overzicht

Tot slot geven we een overzicht van de resultaten:

$$\cos\frac{\pi}{17} = \frac{1}{8p}\left(1 + \sqrt{1 + 32p^2q}\right) \qquad \cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 - \frac{1}{2q}}\right)$$

$$\cos\frac{3\pi}{17} = \frac{1}{2}\left(q + \sqrt{q^2 - 2p}\right) \qquad \cos\frac{4\pi}{17} = \frac{1}{8p}\left(-1 + \sqrt{1 + 32p^2q}\right)$$

$$\cos\frac{5\pi}{17} = \frac{1}{2}\left(q - \sqrt{q^2 - 2p}\right) \qquad \cos\frac{6\pi}{17} = \frac{1}{8q}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8q^2}{p}}\right)$$

$$\cos\frac{7\pi}{17} = \frac{1}{8q}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8q^2}{p}}\right) \qquad \cos\frac{8\pi}{17} = \frac{1}{2}\left(p - \sqrt{p^2 - \frac{1}{2q}}\right)$$

waarbij

$$p = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \text{ en } q = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}.$$

En zoals blijkt kunnen de exacte waarden van $\cos(k\pi/17)$ inderdaad gevonden worden met twee substituties.

Literatuur

- W.K. Bühler (1981): *Gauss / A Biographical Study*. New York: Springer Verlag.
- G. Waldo Dunnington (1955): *Carl Friedrich Gauss / Titan of Science*. Washington D.C.: The Mathematical Association of America.
- K. Jonkers (2009): *De exacte waarde van cos*(π/17). In: *Euclides* 84(5); pp. 175-178.
- H. Tietze (1965): *Famous Problems of Mathematics*. Baltimore: Graylock Press.

Over de auteur

Kees Jonkers was van 1963 tot 1997 leraar aan het Petrus Canisius College te Alkmaar.
E-mailadres: *cbjjonkers@planet.nl*

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Tweede ronde Wiskunde Olympiade

[Marjanne de Nijs]

De Wiskunde Olympiade was voor mij altijd een 'ver van mijn bed show'. Natuurlijk heb ik op scholen gewerkt waar collega's deze wedstrijd organiseerden. En natuurlijk deelde ik de flyers uit aan mijn leerlingen met de vraag of ze zich wilden opgeven. Het hoorde voor mijn gevoel bij het onderwijs: je moet leerlingen de kans geven mee te doen aan wedstrijden waar ze zich kunnen profileren. Soms adviseerde ik een leerling die hoge cijfers haalde voor mijn vak, om vooral mee te doen. Daar bleef het dan bij.
Dit jaar kwam ik op een school te werken waar de olympiade nog niet in het basispakket zat. En zoals het gaat met een goed idee dat je tijdens een vergadering oppert bij het w.v.t.t.k.: je krijgt het direct terug en mag zelf de actie nemen. Gevolg: ik werd wedstrijdleider voor de Wiskunde Olympiade.
Dan ontdek je een hele wereld achter de olympiade. Een goede website met een inloggedeelte voor de wedstrijdleiders. Allerlei oefenmateriaal met complete uitwerkingen voor de diverse ronden en alle informatie die je verder nodig hebt. De organisatie loopt op rolletjes en via e-mail en website werd ik uitstekend op de hoogte gehouden van de stand van zaken.
Dat zat wel goed, nu nog die leerlingen proberen te motiveren… Dat heb ik wat onorthodox gedaan. Er was discussie over een toets die ze graag wilden verzetten, maar ze weten dat mijn planning heilig is, dus er zat niet veel vaart in de onderhandeling. Totdat ik opperde dat de toets twee weken naar achter schoof als we in de tussentijd een deel van de lessen zouden besteden aan oefenen voor de olympiade. Mijn 4v wiskunde-B klas ging juichend akkoord – laten we het een win-win situatie noemen. Buiten de gewone stof kwamen ook de oude olympiade-opgaven op tafel. Ik was direct verbaasd over het plezier en de inzet die ze toonden bij het oplossen van de opgaven. Leerlingen die niet vooruit te branden waren, zaten nu zeer intensief te werken. Nieuwe samenwerkingsverbanden ontstonden en er werd gediscussieerd over de juiste oplossingsmethoden. De toon werd helemaal gezet toen ik uit enthousiasme ook nog riep: 'Als er iemand doorgaat naar de tweede ronde, bak ik een taart.' Samen met 5v wiskunde-B deden mijn leerlingen mee aan de Olympiade. En ja… die taart moest er komen. Van de 32 deelnemende leerlingen gingen er 3 door naar de tweede ronde, waarvan één uit mijn 4v-klas.
Wat me het meest verbaasde was dat het een leerling was die ik zelf nooit gevraagd zou hebben. Hoge cijfers voor mijn toetsen haalt hij niet, maar hij blijkt een doorzettingsvermogen en creativiteit te bezitten die hem en mij versteld deden staan. Deze wedstrijd boorde bij hem vaardigheden aan waarvan we allebei niet wisten dat hij ze had. En ik realiseerde me dat ik hem tekortgedaan had als hij niet de kans had gehad om aan deze wedstrijd mee te doen.
Want die tweede ronde is een ervaring op zich. Met 3 leerlingen begaf ik me op 15 maart naar de TU in Delft, een van de 12 universiteiten waarop de deelnemers aan tweede ronde worden ontvangen. Ook hier is de organisatie uitstekend: studenten begeleiden de leerlingen en er is genoeg ruimte om onderling ervaringen

NWO 2013
OPGAVEN TWEEDE RONDE

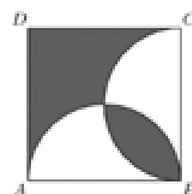
- Beschikbare tijd: 2,5 uur.
- De wedstrijd bestaat uit vijf B-opgaven en twee C-opgaven.
- Je mag geen rekenmachine gebruiken en geen formulekaart; alleen een pen, een passer, een liniaal of geodriehoek en natuurlijk je gezonde verstand.

B-opgaven

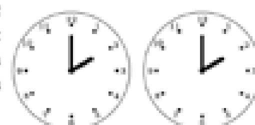
Bij de B-opgaven is het antwoord steeds een getal, dat je op het antwoordformulier moet invullen. Een goed antwoord levert 4 punten op, een fout antwoord 0 punten. Werk dus rustig en nauwkeurig, want een kleine rekenfout kan tot gevolg hebben dat je antwoord fout is. LET OP: geef je antwoorden in exacte vorm zoals $\frac{11}{81}$, 5^3 of $\frac{1}{4}(\sqrt{5}+\pi)$.

B1. Een aantal scholieren deed mee aan een test waar je 100 punten voor kon halen. Iedereen scoorde minstens 60 punten. Precies vijf scholieren scoorden 100 punten. De gemiddelde score van de deelnemende scholieren was 76 punten.
Hoeveel scholieren deden er minstens mee aan deze test?

B2. Gegeven is een vierkant $ABCD$ waarvan de zijden lengte 4 hebben. Aan de binnenkant van het vierkant zijn twee halve cirkels met middellijnen AB en BC getekend (zie figuur).
Wat is de gezamenlijke oppervlakte van de twee grijze gebieden?



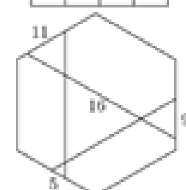
B3. De wijzers van twee klokken, zoals die in de figuur hiernaast, draaien met constante snelheid rond. Beide klokken lopen niet meer goed; de een loopt precies 1% sneller dan de werkelijke tijd, en de ander zelfs precies 5% sneller dan de werkelijke tijd. Op een bepaald moment wijzen ze allebei precies 2 uur aan. Na verloop van tijd wijzen de klokken voor het eerst opnieuw dezelfde tijd aan.
Welke tijd wijzen ze op dat moment aan?



B4. In het getallenvierkant hiernaast staan positieve getallen. Het *product* van de getallen in iedere rij, iedere kolom en elk van de twee diagonalen is steeds hetzelfde.
Welk getal staat op de plaats van H?

$\frac{1}{2}$	32	A	B
C	2	8	2
4	1	D	E
F	G	H	16

B5. Een regelmatige zeshoek is door lijnen evenwijdig aan de zijden in zeven stukken verdeeld zoals in de figuur. Vier van de stukken zijn gelijkzijdige driehoeken, waarvan de lengtes van de zijden in de guur aangegeven zijn.
Wat is de lengte van de zijden van de regelmatige zeshoek?





uit te wisselen. De wedstrijdsfeer zat er al goed in en na een prima lunch stapten ze met ongeveer 60 andere leerlingen de collegezaal in. Ze kregen tweeëneenhalf uur voor zeven opgaven, die u bij dit artikel kunt vinden. Na afloop kregen ze de uitwerking en een hapje en drankje, precies wat ze nodig hadden. Want de inwendige mens moest aangevuld worden na deze exercitie; maar vooral het 'nakaarten' met behulp van de uitwerkingen was belangrijk. Ze werden nog net niet uit de handen van de begeleiders getrokken. Dan krijg je uitspraken als 'Yesss!' of 'Ja, nu zie ik het wel' en 'Dan zat ik er maar 1 naast'. Als docent kun je alleen maar heel trots zijn op leerlingen die zo enthousiast en actief iets echt willen weten.
Tevreden reden we terug naar huis, een ervaring rijker. Want ook al namen we dapper afscheid met 'tot in de finale', dat is helaas maar afwachten en slechts weinigen gegeven. We besloten dat deelnemen al zó leuk is dat we het winnen eventueel met plezier aan anderen overlaten.

Over de auteur
Marjanne de Nijs is docent wiskunde op het Lyceum Ypenburg in Den Haag en is daarnaast hoofdredacteur van *Euclides*.
E-mailadres: *marjanne.de.nijs@gmail.com*

C-opgaven

Bij de C-opgaven is niet alleen het antwoord van belang; ook je redenering en de manier van oplossen moet je duidelijk opschrijven. Maak elke C-opgave op een apart vel papier. Elke correct uitgewerkte C-opgave levert 10 punten op. Voor gedeeltelijke oplossingen kunnen ook punten verdiend worden. Schrijf daarom alles duidelijk op en lever ook (per opgave!) je kladpapier in.

C1. We noemen een positief geheel getal van n cijfers ($n \geq 3$ en $n \leq 9$) *bovengemiddeld* als het voldoet aan de volgende twee eisen:

- het getal bevat alle cijfers van 1 tot en met n precies één keer;
- voor elk cijfer behalve de eerste twee geldt: het dubbele van het cijfer is minstens zo groot als de som van de twee cijfers die er direct voor staan.

Zo is 31254 bovengemiddeld, want het bestaat uit de cijfers 1 tot en met 5 en verder geldt

$$2 \cdot 2 \geq 3 + 1, \quad 2 \cdot 5 \geq 1 + 2, \quad 2 \cdot 4 \geq 2 + 5.$$

(a) Geef een bovengemiddeld getal van 4 cijfers waarvan het eerste cijfer een 4 is.
(b) Laat zien dat er geen bovengemiddeld getal van 4 cijfers is waarvan het tweede cijfer een 4 is.
(c) Bepaal voor bovengemiddelde getallen van 7 cijfers alle mogelijke posities van het cijfer 7.

C2. We noemen een drietal (x, y, z) *goed* als x, y en z positieve gehele getallen zijn met $y \geq 2$ en er bovendien geldt dat $x^2 - 3y^2 = z^2 - 3$.
Een voorbeeld van een goed drietal is (19, 6, 16), want er geldt: $6 \geq 2$ en $19^2 - 3 \cdot 6^2 = 16^2 - 3$.

(a) Laat zien dat er voor elk *oneven* getal $x \geq 5$ minstens twee goede drietallen (x, y, z) bestaan.
(b) Vind een goed drietal (x, y, z) waarbij x *even* is.

MEDEDELING / WwF

De meiveiling van het **Wereldwiskunde Fonds** loopt dit jaar vanaf ca. 1 mei 2013 tot 31 mei 2013, 12:00 uur ('s middags!).
Er worden ongeveer 400 boeken aangeboden, deze keer veel (wetenschappelijk) werk van het Freudenthal Instituut, oude schoolboeken en veel wetenschappelijke wiskundeboeken uit binnen- en buitenland.
Neem vooral tijdig een kijkje, en bied gezellig mee!

Info

Veilingmeester WwF: Jos Remijn
E-mailadres: *wereldwiskundeboeken@gmail.com*
Website: *www.wereldwiskundeboeken.nl*



Uit de Zebrareeks...

DEEL 4

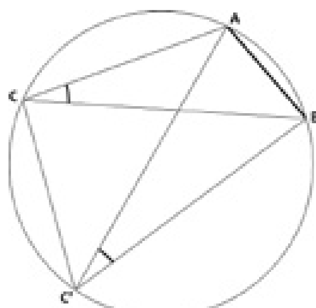
[Rob van Oord]

De redactie van de Zebrareeks valt onder verantwoordelijkheid van de NVvW. Deze reeks is bij uitstek geschikt om te gebruiken als basis voor een keuzeonderwerp of als aanzet voor een praktische opdracht. Vanwege de grote diversiteit van de onderwerpen is er voor elk wat wils maar dat maakt het ook lastig kiezen. Om het u makkelijker te maken zetten we in komende nummers van *Euclides* telkens een Zebra in de schijnwerpers. Wie weet zet het u aan tot een (nog) intensiever gebruik van deze unieke boekjes.

Boekje 31
Titel: Meester Ludolphs Koordenvierhoek
Auteurs: Marjanne de Nijs en Steven Wepster
Onderwerpen: gelijkvormigheid, stelling van Pythagoras, bewijzen in de meetkunde, stelling van Ptolemaeus, rekenen met wortels, rekenen met letterbreuken
Benodigde voorkennis: gelijkvormigheidseisen en congruentiegevallen van driehoeken, handig kunnen splitsen van wortels



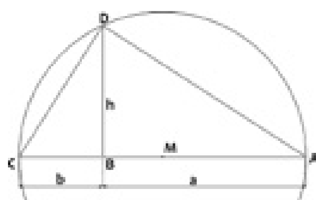
Kadertekst 1 – De stelling van de constante hoek luidt:
Bij een koorde (*AB*) van een cirkel is de hoek (*ACB*) met als hoekpunt een willekeurig punt (*C* of *C'*) op de cirkelboog (*AB*) aan een kant van de koorde (*AB*) en als benen de verbindingslijnstukken van dat punt met de uiteinden (*A* en *B*) van de koorde altijd even groot, constant dus. ***Zie figuur k1***.



figuur k1

Daarin geldt dus dat $\angle ACB = \angle AC'B$.

Kadertekst 2 – De middelproportionaal
Teken een cirkel met middellijn *AC* met lengte $a + b$, met $AB = a$ en $BC = b$; ***zie figuur k2***. Teken *D* op de cirkel waarbij *BD* loodrecht staat op *AC*. Omdat $\angle ADC = 90°$, volgens de stelling van Thales, zijn de driehoeken *ABD*, *DBC* en *ADC* gelijkvormig.



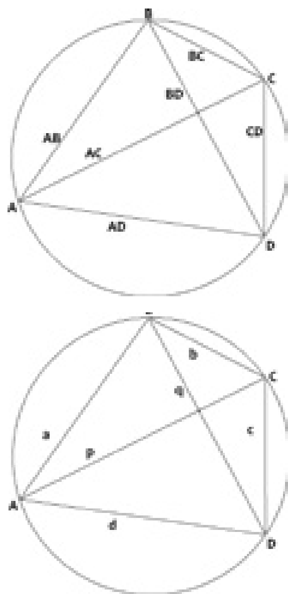
figuur k2

Stel $BD = h$, dan geldt $h : b = a : h$, dus $h^2 = a \cdot b$ oftewel $h = \angle(a \cdot b)$.
h is dan de middelproportionaal (de middelevenredige, de mprp) van *a* en *b*.

Waarover gaat het boekje en hoe zit het in elkaar?
In dit boekje wordt de meetkundige constructie van een koordenvierhoek die gemaakt moet worden van vier gegeven lijnstukken gekoppeld aan de berekeningen van de lengtes van de diagonalen van de koordenvierhoek als de lengte van de gegeven lijnstukken in getallen zijn uitgedrukt.
Na een korte inleiding wordt de lezer geconfronteerd met het construeren van lijnstukken met behulp van gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras en met behulp van de constructie van de middelevenredige (de *middelproportionaal*) de constructie van $\sqrt{(a \cdot b)}$ uit *a* en *b*. Zo wordt bij een gegeven
lijnstuk, dat $\sqrt{28}$ als lengte voorstelt, gevraagd om de eenheid en daarmee een lijnstuk van lengte $(4 + \sqrt{28})$ te construeren. Deze oefeningen waren nodig om vervolgens het recept van de berekening en de daaruit volgende constructie van één van de diagonalen van de gezochte koordenvierhoek te kunnen uitvoeren. Door op de diagonaal een driehoek te construeren met twee van de gegeven zijden is de cirkel waarop de koordenvierhoek ligt bekend: de omgeschreven cirkel van die driehoek. Omdat het recept waarmee de lengte van de diagonaal gevonden wordt, geen echt bewijs is van de juistheid van de constructie, volgt er nog een meetkundig bewijs. In het laatste hoofdstuk wordt hier ruimschoots aandacht aan besteed. Met de stelling van Ptolemaeus komt het allemaal voor elkaar.
Het boekje sluit af met twee eindopdrachten. Bij de eerste gaat het om het stap voor stap narekenen (zonder rekenmachine) van de lengtes van alle lijnstukken die relevant zijn voor de constructie van de koordenvierhoek. Door dit narekenen moeten zetfouten in de originele tekst worden opgespoord. De tweede eindopdracht is een andere manier om de koordenvierhoek te construeren dan eerder in het boekje is behandeld. De originele tekst in Oudnederlands moet stap voor stap worden uitgevoerd. Als er nauwkeurig getekend is, moet de uiteindelijke cirkel precies passen bij de vier gegeven lijnstukken.

De behandelde stof in het kort

Ik denk dat het voor de lezer prettig is om meteen met de relevante wiskunde van dit boekje te beginnen. Daarom behandel ik de stof van het boekje in omgekeerde volgorde. Voor het begrijpen van de constructie van de gevraagde koordenvierhoek moet je *de stelling van Ptolemaeus* kennen. Die zegt: Bij een koordenvierhoek $ABCD$ met zijden a (AB), b (BC), c (CD) en d (AD), en diagonalen p (AC) en q (BD) geldt: $a \cdot c + b \cdot d = p \cdot q$; ***zie figuur 1a en 1b***.



figuur 1

Om de stelling van Ptolemaeus te bewijzen kan je gebruik maken van gelijkvormigheid van driehoeken en *de stelling van de constante hoek*; ***zie kadertekst 1***.

De stelling van Ptolemaeus kan nu bewezen worden door het hulplijnstuk BE te tekenen, waarvan punt E op AC ligt zodat $\angle ABE = \angle DBC$; ***zie figuur 2***. Ik daag de lezer uit dit nu eerst zelf het bewijs van de stelling te geven.

… … … … …

Het gaat zo. Gevolg van de plaats van het punt E is dat driehoek ABE gelijkvormig is met driehoek DBC en ook dat de driehoeken BAD en BEC gelijkvormig zijn. Een gevolg van die gelijkvormigheden is: $AB : DB = AE : DC$ en $AD : EC = BD : BC$

Kruislings vermenigvuldigen en optellen geeft:

$AB \cdot CD + BC \cdot DA = BD \cdot (AE + EC)$, dus $a \cdot c + b \cdot d = p \cdot q$

Wanneer het mogelijk is om met vier lijnstukken a, b, c en d een koordenvierhoek te maken, dan kunnen met diezelfde vier lijnstukken drie wezenlijk verschillende koordenvierhoeken gemaakt worden, allemaal op een even grote cirkel. Probeert u het eens uit met vier stokjes van verschillende lengtes als koorden van een cirkel. Als je ***in figuur 2*** de driehoek BCD, met zijden b, c en p, gespiegeld op de diagonaal BD plakt, d.w.z. driehoek BCD uitknippen, spiegelen, en punt B op punt D van driehoek ABD plakt en punt D op punt B van driehoek ABD, dan is duidelijk dat punt C ook weer op de zelfde cirkel terecht komt. Van elk van die drie koordenvierhoeken komt een van de diagonalen ook als diagonaal voor in een van de andere drie.

Er kunnen met de stelling van Ptolemaeus dus drie verbanden worden opgeschreven tussen de zijden a, b, c en d en twee van de drie mogelijke diagonalen p, q en r. Een daarvan is staat hierboven genoemd. De andere twee zijn $a \cdot b + c \cdot d = p \cdot r$ en $a \cdot d + b \cdot c = q \cdot r$. Door handig combineren kun je een van de drie diagonalen uitdrukken in a, b, c en d. Zo vind je bijvoorbeeld:

$$p^2 = \frac{(a \cdot b + c \cdot d)(a \cdot c + b \cdot d)}{(a \cdot d + b \cdot c)}.$$

Je kunt nu $p = \frac{m \cdot w}{z}$ construeren met drie lijnstukken (met lengtes) m, w en z, waarbij $m = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ met $x^2 = a \cdot b$ en $y^2 = c \cdot d$. Hier komt de constructie van de *middelproportionaal* (mprp) om de hoek kijken; **zie kadertekst 2**.

$x = \sqrt{(ab)}$ is de mprp van a en b, evenzo is $y = \sqrt{(cd)}$ de mprp van c en d. Met de stelling van Pythagoras en x en y vind je nu de lengte van m (= $ab + cd$). Op een vergelijkbare manier kunnen de lengtes w (= $ac + bd$) en z (= $ad + bc$) ook worden geconstrueerd.

Met twee gelijkvormige driehoeken waarin m, w en z op de juiste manier verwerkt zijn, kun je dan p construeren. ***Zie figuur 3***, waarin $p : m = w : z$.

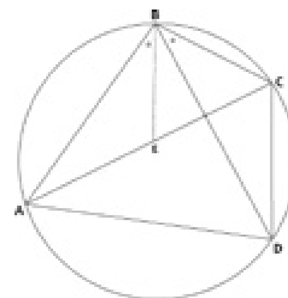
Grappig is dat bij $a = 6$, $b = 8$, $c = 9$ en $d = 18$ geldt dat $p = \sqrt{231}$ (zie noot [1]). En die is eenvoudig te construeren als mprp van 11 en 21. Nu zijn we bijna rond. Bij de net genoemde zijden is dit de diagonaal BD ($p = BD$). Teken de omgeschreven cirkel van driehoek BCD met $BD = \sqrt{231}$, $BC = b = 8$ en $CD = c = 9$. Dit kan door de middelloodlijnen van de zijden BC en CD te tekenen.

Als het goed is kun je nu punt A van de gevraagde koordenvierhoek vinden door $AB = 6$ vanuit B af te passen. Er zal blijken dat nu $AD = 18$!!

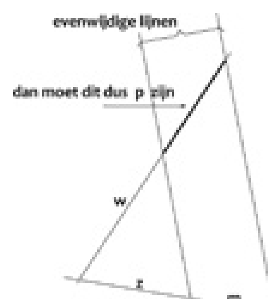
De gevraagde koordenvierhoek is gevonden.

In het boekje wordt begonnen met het oefenen in construeren van lijnstukken met lengtes in wortels, als ook het vinden van de eenheid als een bepaalde lengte voor een wortel gegeven is. Er wordt gebruik gemaakt van gelijkvormigheid van driehoeken zoals hierboven.

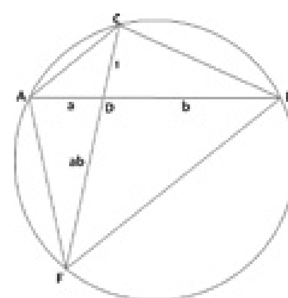
Maar voor het vermenigvuldigen of delen van lijnstukken wordt ook wel de constructie in een cirkel gebruikt. Met behulp van de stelling van de constante hoek kun je bewijzen dat – met A, B, C, F op eeen cirkel – driehoek ADF gelijkvormig is met driehoek CDB. Als je twee lijnstukken a (AD) en b (DB) optelt tot zijde AB en in het deelpunt D een lijnstuk met lengte 1 (CD) er 'dwars' opzet, dan is het tweede deel (DF) van de koorde waarop CD ligt, gelijk aan ab. ***Zie figuur 4***.



figuur 2



figuur 3



figuur 4

Hoe is het voor de leerlingen?

Voor de leerlingen is het eerst even wennen dat er met passer en liniaal moet worden getekend. Het is voor sommige een 'aha-erlebnis' hoe je in een rooster lijnstukken kan construeren waarvan de lengte gelijk is aan de wortel uit een geheel getal. Zeker als dit op meer manieren kan, zoals $\sqrt{5} = \sqrt{(2^2 + 1^2)}$ of $\sqrt{5} = \sqrt{(3^2 - 2^2)}$. De meetkundige bewijzen sluiten mooi aan bij de wiskunde-B stof. Het vertalen van Oudnederlands en het narekenen van de voorbeelden van meester Ludolph (van Ceulen) levert geen problemen op.

Kortom in vijf weken, waarin 1 les per week aan het boekje gewerkt wordt, krijgen ze het mooi af. Dan wordt door het lot bepaald of het tweetal dat tot nu toe heeft samengewerkt, de eindopdracht 1 dan wel 2 krijgt. Voor eindopdracht 1 moeten allerlei berekeningen zonder rekenmachine worden berekend. Voor eindopdracht 2 moet stap voor stap een andere manier van de constructie van de vierhoek, beschreven in Oudnederlands, worden uitgevoerd. Voor het bepalen van het dossiercijfer heb ik enerzijds gekeken naar de uitwerkingen van de opgaven uit het boekje (80%), anderzijds naar de uitvoering van de eindopdracht (20%). Elke leerling heeft een schrift met zijn/haar uitwerkingen moeten inleveren. Ze vonden het prettig dat met goed werken een goed cijfer gehaald kon worden.

Enkele opmerkingen

Opvallend aan de originele plaatjes in het boekje is dat er nogal wat zetfouten in staan. Kennelijk was het – in Van Ceulen's tijd – lastig om de houtgravures te maken waarbij alle letters en getallen in spiegelbeeld moesten worden uitgesneden. Het boekje geeft leerlingen een beeld waarmee wiskundigen in de tijd van Ludolph bezig waren. De algebra stond nog op een laag pitje. De regel Coss (het 'ding', cosa, dat gezocht wordt) was bekend, zoals bij het oplossen van de vergelijking $x^2 + 10x = 39$ door middel van ontbinden. Maar verder werd er meer gerekend dan met variabelen gewerkt.

Noot

[1]

$$p=\sqrt{\frac{(6\cdot 8+8\cdot 9)(6\cdot 9+8\cdot 18)}{(6\cdot 18+8\cdot 9)}}=\sqrt{\frac{(48+162)(54+144)}{108+72}}$$
$$=\sqrt{\frac{210\cdot 198}{180}}=\sqrt{\frac{10\cdot 21\cdot 11\cdot 18}{10\cdot 18}}=\sqrt{21\cdot 11}=\sqrt{231}$$

Over de auteur

Rob van Oord gebruikt elk jaar vele boekjes in zijn klassen. Hij is sinds 1974 werkzaam als eerstegraads docent wiskunde aan het Coenecoop College te Waddinxveen. Voor vragen, suggesties en opmerkingen kunt u hem een e-mailbericht zenden.
E-mailadres: *robvanoord@tiscali.nl*

Afleiding abc-formule zonder kwadraatafsplitsing

KLEINE DIDACTIEK

[Gerard Wiarda]

De grafiek van de functie:
$y = f(x) = ax^2 + bx + c$
(het is een parabool) snijdt vanwege zijn uitgestrektheid (domein = $\mathbb{R}$) steeds de y-as, en wel in het punt $(0, c)$.
Bekijk een dalparabool ($a > 0$) met top T boven de x-as.
Laat de parabool zakken tot deze door het punt O gaat, ofwel $c = 0$ (***zie figuur 1***).
In dit geval is: $ax^2 + bx = 0$, zodat:
$x(ax + b) = 0$
Naast $x = x_1 = 0$ is het andere nulpunt dus:
$x = x_2 = -\frac{b}{a}$

Verder is: $x_T = \frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$.

Laat de parabool verder zakken (dan is $c < 0$) en ga op zoek naar de nulpunten x_1 en x_2 (***zie figuur 2***).
Noem $x_2 - x_1 = 2p$ ($p > 0$), zodat $x_1 = x_T - p$ en $x_2 = x_T + p$.

Er geldt in dit geval:
$f(x_1) = f(-\frac{b}{2a} - p) = 0$, ofwel:

$$a(-\frac{b}{2a}-p)^2+b(-\frac{b}{2a}-p)+c=0$$
$$a(\frac{b^2}{4a^2}+\frac{b}{a}\cdot p+p^2)-\frac{b^2}{2a}-bp+c=0$$
$$\frac{b^2}{4a}+\cancel{bp}+ap^2-\frac{b^2}{2a}-\cancel{bp}+c=0$$
$$ap^2-\frac{b^2}{4a}+c=0$$

Zodat: $p^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

Dan is (wegens $p > 0$): $p = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Omdat $a > 0$ is en $c < 0$, is hier $b^2 - 4ac > 0$.
Derhalve is:
$x_1 = -\frac{b}{2a} - p = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

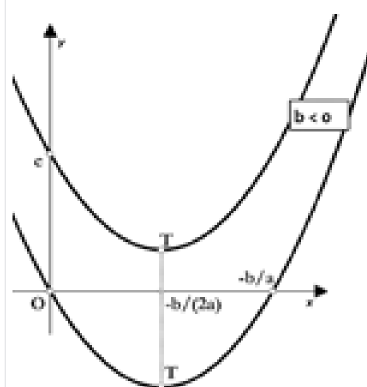
Of:
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Zie daar!

Uiteraard geldt analoog:

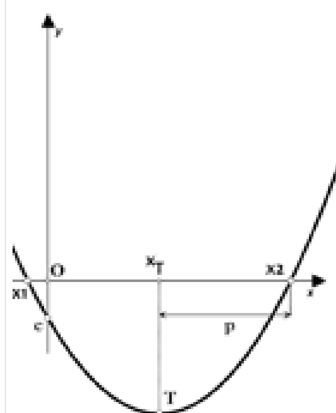
$x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Waarvan akte!

Over de auteur

Gerard Wiarda was veertig jaar werkzaam als docent wiskunde aan het Wessel Gansfortcollege in Groningen. Na zijn pensionering heeft hij zijn carrière voortgezet op het Augustinuscollege aldaar, waar hij nog steeds met veel plezier wiskunde onderwijst.



figuur 1



figuur 2

Opbrengstgericht werken in de onderbouw

[Victor Schmidt en Jos Tolboom]

Wat zijn de ervaringen van docenten en leerlingen bij het doceren en leren van kwadratische vergelijkingen?

Inleiding

In de afgelopen jaren is het fenomeen 'opbrengstgericht werken' steeds vaker opgedoken in onderwijskundig verband. In het Nederlandse onderwijsbeleid verscheen in 2007 al de nota *Scholen voor Morgen* (zie [a]), waarin het streven naar verbetering van de taal- en rekenvaardigheden van leerlingen in het primair onderwijs centraal staat. Sindsdien is dit speerpunt van beleid gebleven. Het vak wiskunde in het voortgezet onderwijs heeft in dit kader bijvoorbeeld te maken met nieuwe kerndoelen onderbouw en een verplichte rekentoets aan het einde van vmbo, havo en vwo. Daarnaast wordt momenteel gewerkt aan een zogenoemde diagnostische tussentoets, zowel voor rekenen als voor wiskunde, die in de derde klas zal worden afgenomen. Veel aandacht dus voor doelen en toetsen.

Tegelijkertijd hebben we in het eerste decennium van de 21e eeuw, met name in de Verenigde Staten, een ontwikkeling gezien die 'data driven teaching' (zie [b]) wordt genoemd. Bij dit soort onderwijs laat de docent de instructie en de activiteiten van de leerlingen afhangen van meetgegevens met betrekking tot de leervoortgang van leerlingen. In principe is hier uiteraard niets nieuws onder de zon. Iedere docent laat zich al in meer of mindere mate sturen door bijvoorbeeld de resultaten van toetsen en door eigen leerlingobservaties in de klas. Wat is dan nieuw aan lesgeven volgens dit principe? Het nieuwe bestaat hem vooral uit systematische aandacht voor wat leerlingen kunnen en niet kunnen, en uit het feit dat deze aandacht ook echt leidend is voor het inrichten van de lessen.

In het primair onderwijs is dit al redelijk gebruikelijk. Daar is het gebruik van leerlingvolgsystemen als Cito LOVS redelijk ingeburgerd. Het benadrukken van het belang van dat soort toetsen leidt echter wel tot een 'toetscultuur'. Belangrijke vraag is daarom: hoe verzamel je gegevens over de leerlingen om op te kunnen sturen zonder een toetscultuur te creëren? Het paradoxale antwoord in ons project was: 'Maak alles een toets. Dan bestaan er geen toetsen meer.'

Het systematische aspect van opbrengstgericht werken kan op verschillende manieren worden vormgegeven. In ons project hebben we gekozen voor een aanpak als weergegeven ***in figuur 1*** op pag.312.

Uit eerdere evaluaties van *meetgestuurd onderwijs* [een vertaling van 'data driven teaching'; red.] blijkt dat docenten al deze stappen wel doorlopen, maar zelden op een systematische manier (zie [c]).

Formatief versus summatief

Heeft meetgestuurd onderwijs een positieve invloed op de prestaties van de leerlingen? Ja, zegt de onderzoeksliteratuur (zie [d1] en [d2]), als het gebeurt op basis van formatief toetsen. '*Formatieve toetsing* is een doorlopend proces van informatie verzamelen over de leerresultaten, over sterke en zwakke punten, die de docenten/leerkrachten kunnen gebruiken voor feedback bij hun lesvoorbereiding en naar hun leerders toe', definieert het TaalUnieversum [1]. Bij formatieve toetsing gaat het dus nadrukkelijk *niet* om het geven van een kwalificatie in de vorm van een cijfer ('je hebt het goed gedaan, of slecht gedaan'), maar om het stimuleren van het leren zelf ('je kunt jezelf verbeteren door die en die opgaven nog eens te maken'). Vandaar dat in het Engels de term 'assessment *for* learning' (zie [e]) veel wordt gebruikt. De docent kan hierbij informatie uit veel bronnen gebruiken: traditionele toetsen aan de ene kant, maar ook gesprekken met een leerling of zelfs het observeren van lichaamstaal aan de andere kant. Wanneer deze formatieve manier van toetsen goed wordt toegepast, staan feedback door de docent aan de leerling en feedback door de leerling – in de vorm van observeerbaar gedrag – aan de docent centraal (zie [f]).

Korte beschrijving van het project

In de periode maart 2011 tot en met september 2012 hebben wiskundedocenten van vijf scholen deelgenomen aan het SLO-project 'Opbrengstgericht werken bij rekenen en wiskunde in het voortgezet onderwijs'. Dit waren OSG De Hogeberg in Den Burg, CSG Reggesteyn in Rijssen, EBVO De Passie in Utrecht, RSG Wolfsbos in Hoogeveen en het Johan de Witt-gymnasium in Dordrecht. Doel was om een onderdeel van het curriculum te doceren volgens de opzet van 'meetgestuurd onderwijs' en te onderzoeken wat de ervaringen van docenten en leerlingen hiermee zouden zijn. Het project richtte zich specifiek op de doceerbaarheid. Als eerste stap in het vo gaat dat aan verdere en mogelijk verfijndere stappen vooraf.

Onderzoeksvragen en onderzoeksopzet

Bij aanvang van het project hebben wij de volgende drie onderzoeksvragen geformuleerd:

1. Hoe kan een school opbrengstgericht werken bij wiskunde aanpakken?
2. Presteert een groep waarin opbrengstgericht werken is toegepast beter dan een vergelijkbare groep?
3. Welke voorwaarden moeten vervuld zijn om opbrengstgericht werken tot een succes te maken?

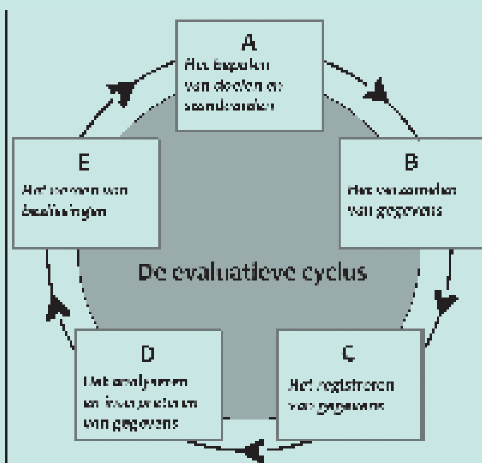
Gedurende het project hebben we onze focus iets bij moeten stellen, maar globaal hebben we de data verzameld die nodig waren om de eerste twee vragen te beantwoorden. De derde onderzoeksvraag is buiten beschouwing gebleven.

Daarvoor hebben we de volgende instrumenten gehanteerd:

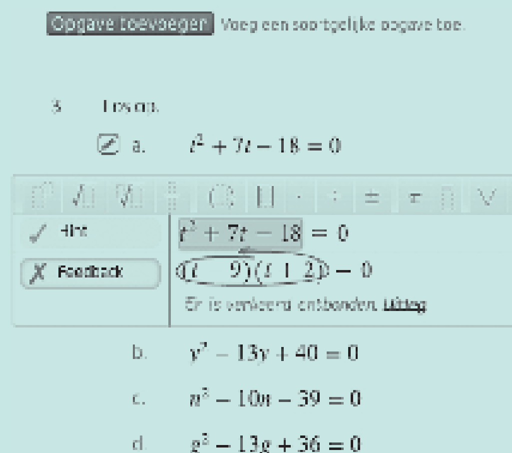
1. Lesobservatie; in iedere experimenteergroep en in iedere controlegroep hebben we een les geobserveerd en op video opgenomen.
2. Interviews met deelnemende docenten; individueel en na afloop als groep.
3. Vragenlijsten aan de leerlingen (van experimenteer- en controlegroepen). Hiervoor hebben we elementen gebruikt uit twee gevalideerde vragenlijsten: de *Belevingschaal wiskunde* (BSW; zie [g]) en de *Motivated Strategies for Learning Questionnaire* (MSLQ; zie [h]).
4. Tussentijdse toets en afsluitende toets.

Onderwijsontwerp

In dit project hebben we gekozen voor onderbouw havo/vwo. Het leek ons beter om dichter bij het po te blijven, waar opbrengstgericht werken al enigszins gebruikelijk is. De uitrol naar de bovenbouw lijkt ons eenvoudiger dan een in de bovenbouw ontwikkelde werkwijze terugvertalen naar de onderbouw. Bovendien wilden we ervaringen in klassen met



figuur 1: De evaluatieve cyclus



figuur 2: Specifieke feedback in SmartRekenen

opbrengstgericht werken graag vergelijken met parallelklassen, liefst met dezelfde docent. Dit is in de onderbouw eenvoudiger te verwezenlijken.
Het onderwerp dat centraal stond in het ontwerp was 'Kwadratische vergelijkingen'. Wij kozen voor dit onderwerp vanwege het procedurele karakter van dit onderwerp. Een slimme leerling kan misschien zelf de procedures bedenken die nodig zijn om een lineaire vergelijking op te lossen. Maar bij een kwadratische vergelijking van de algemene vorm $ax^2 + bx + c = 0$ is dat veel lastiger, en zal gebruik van expliciete algoritmen een duidelijke meerwaarde hebben ten opzichte van de intuïtieve aanpak.

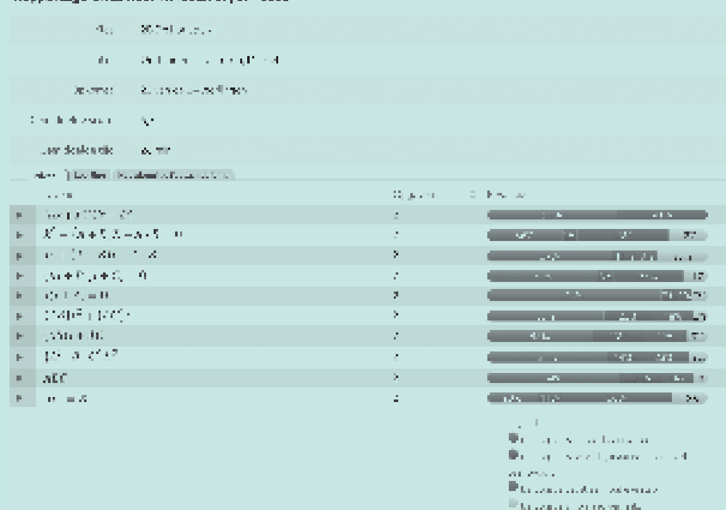
Er was nog een belangrijke reden om een onderwerp te kiezen waarbij de nadruk lag op procedurele kennis. Omdat we besloten zoveel mogelijk informatie van leerlingen te verzamelen om de sturing op te baseren moesten we het onderwijs ondersteunen met behulp van ICT. Data verzamelen, analyseren en interpreteren – stap B, C en D van de evaluatieve cyclus (***zie figuur 1***) – zou zonder inzet van ICT een bijna onmogelijke klus zijn geweest.
Na het analyseren van enkele gereedschappen ter ondersteuning van de docent in zijn meetgestuurde onderwijs hebben we gekozen voor *SmartWiskunde*[2]. Sterke punten van dit product zijn de specifieke feedback (***zie figuur 2***), het gebruikersdashboard voor zowel leerling als docent (***zie figuur 3*** voor het docentdashboard), de modulaire opbouw en configureerbaarheid en de fraaie, onderbouwde en consistente gebruikersinterface. Doorslaggevend bij onze keus was echter het feit dat de ontwikkelaar van *SmartWiskunde* een volwaardige partner wilde zijn in het project. Dit had voor de docenten het grote voordeel dat de software op maat geleverd konden krijgen. De software is gedurende het project ook drastisch verbeterd.
Alle materiaal, opgaven en theorie, werd geleverd in de tool, waardoor de lessen een sterk digitale inslag kregen.
Bij de vulling van de tool is het leerstofdomein 'Kwadratische vergelijkingen' uiteengelegd in kleine leerstofonderdelen die in een bepaalde volgorde door alle leerlingen – meer of minder getalenteerd – doorlopen worden. Deze leerstofonderdelen hebben elk een kern, waarin een wiskunderoutine, een wiskundige eigenschap of gebruiksvaardigheid centraal staat. We hebben voor ons domein het schema dat ***in figuur 4*** staat, ontwikkeld. Vervolgens is per leerstofonderdeel een aantal complexiteitsniveaus gedefinieerd.
Bij bijvoorbeeld het leerstofonderdeel 'Drietermen ontbinden in factoren' zijn onderstaande drie gekozen:
- de drieterm is van de vorm $x^2 + bx + c$ met $b > 0$ en $c > 0$;
- de drieterm is van de vorm $x^2 + bx + c$ met $b < 0$ en/of $c < 0$;
- de drieterm is van de vorm $ax^2 + bx + c$.

Bij 'Uit $A \times B = 0$ volgt $A = 0$ of $B = 0$' zijn de complexiteitsniveaus:
- deze eigenschap alleen kennen en gebruiken;
- kunnen uitleggen dat uit $A \times B = C$ *niet* volgt dat $A = C$ of $B = C$ (met $C \neq 0$).

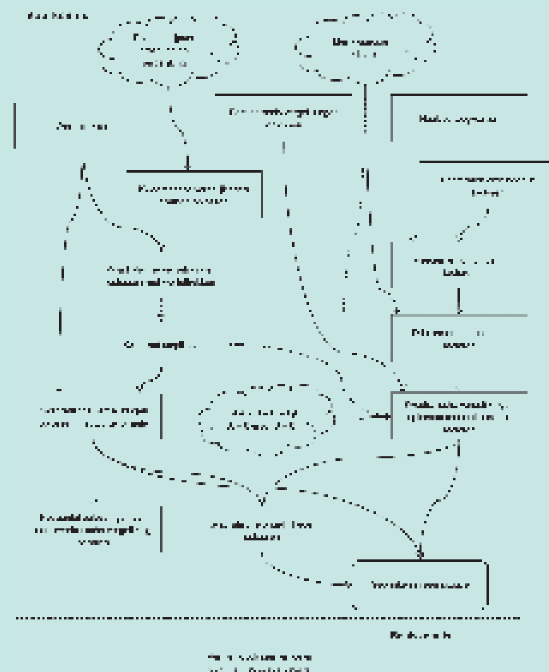
Aan de hand van deze niveaus kon aangegeven worden hoe goed leerlingen drietermen moeten kunnen ontbinden in factoren of de genoemde eigenschap moeten kennen. Ook voortgangsmetingen bij leerlingen werden geformuleerd in termen van deze leerstofonderdelen en complexiteitsniveaus.

Resultaten

Uit de observaties en uit interviews met de deelnemende docenten is gebleken dat het zeker niet meevalt om 'opeens' te gaan lesgeven volgens de opzet van meetgestuurd onderwijs. Los van de praktische beslommeringen van reserveringen van computerlokalen viel het lang niet altijd mee om de didactiek ook werkelijk zo toe te passen als gewenst. Een duidelijk voorbeeld daarvan, terugkijkende naar de evaluatiecyclus ***van figuur 1***, is de overgang van analyse en interpretatie van data naar bijsturing van de lessen. Docenten gaven aan dat ze de stap naar 'digitaal doceren' al erg groot vonden. Onze suggestie om de leerlingen alle opgaven buiten de les te laten maken, voor de les in te loggen en op basis van de vorderingen en/of de problemen van de leerlingen een lesplanning te maken, leek in de korte looptijd van dit project (één hoofdstuk, dus 2-3 weken) niet of nauwelijks realiseerbaar.
Aan de kant van de leerlingen was er geen significante verandering meetbaar in houding ten opzichte van of mening over wiskunde. Daarbij leek er ook geen interne consistentie in hun antwoorden: waar sommige items een significante 'verbetering' in hun houding ten opzichte van wiskunde lieten zien ('Zonder wiskunde zou het op school veel leuker zijn.'), liet een vergelijkbaar item ('Bij wiskunde ben ik blij als het lesuur voorbij is.') een achteruitgang zien. Deze achteruitgang was niet significant en dus non-existent, maar was in ieder geval geen ondersteuning van wat wij in de opzet dachten te kunnen aantonen: leerlingen krijgen op deze manier meer plezier in wiskunde.
De leerresultaten in de experimenteergroepen waren niet significant beter dan in de controlegroepen. Uit deze proefopzet is niet af te leiden dat dit mede is veroorzaakt doordat beide groepen op een traditionele wijze werden getoetst.
Aan de kant van de docenten was wel sprake van enthousiasme. Alle deelnemers aan het project willen verder met de werkwijze die in het project is geïnitieerd. Daarbij bleek uit het afsluitende groepsinterview dat zij wel vonden dat zij die werkwijze nog niet echt onder de knie hadden. Dat konden wij ook constateren in de lesobservaties. De stap die in de literatuur als lastig wordt gekenschetst, bleek ook in dit project een hele lastige: hoe pas ik de instructie aan op basis van de data? De docenten gaven aan dat zij een beter zicht kregen op de voortgang van de



figuur 3: Het dashboard van de docent



figuur 4: Leerlijn voor kwadratische vergelijkingen

wiskundeprestaties van hun leerlingen. Dat zal zeker zo zijn, maar stap E in de evaluatieve cyclus (***in figuur 1***) kon niet door alle docenten systematisch worden ingebed in de instructie. Het verdient zeker aanbeveling te onderzoeken of dat een gevolg was van de relatief korte duur van het project (twee tot drie weken), of dat er andere problemen waren die de docenten het zetten van deze stap bemoeilijkt. De stap A is in het project systematisch en collectief gezet en de stappen B, C en D werden wel een vast onderdeel van de lessen. Dit werd met name mogelijk gemaakt door de ondersteuning door *SmartRekenen*.

De docenten rapporteerden dat hun leerlingen, mede onder invloed van de tool waarmee is gewerkt, enthousiaster werkten. In de geobserveerde lessen was dat ook de waarneming. Maar dit is niet eenduidig en significant uit de vragenlijsten naar voren gekomen. De eigen motivatie van de docenten was bij deze invulling van opbrengstgericht werken ook groter dan normaal. Ook dat kan aan de nieuwigheid van de werkwijze hebben gelegen en in een mogelijk langer project weer normaliseren.

Conclusies

De onderzoeksvragen hebben we op basis van het bovenstaande als volgt beantwoord.

1. *Hoe kan een school opbrengstgericht werken bij wiskunde aanpakken?*
   Het ontworpen lesmateriaal, ondersteund door specifieke ICT en training in de vorm van netwerkbijeenkomsten en lesobservatie met nabespreking is onvoldoende gebleken om voor de docenten alle stappen van de evaluatieve cyclus systematisch in hun onderwijs in te bedden. Docenten denken dat het wel mogelijk is in deze opzet, maar dan met een langere periode van training.
2. *Presteert een groep waarin opbrengstgericht werken is toegepast beter dan een vergelijkbare groep?*
   In dit project was er geen significant verschil waarneembaar tussen controle- en experimenteergroepen.
3. *Welke voorwaarden moeten vervuld zijn om opbrengstgericht werken tot een succes te maken?*
   Deze vraag is op basis van onze data moeilijk te beantwoorden, want het project heeft, ondanks het grote enthousiasme van de deelnemende docenten, niet geleid tot het gewenste succes. De belangrijkste verhinderende omstandigheden waren hier, volgens de rapportage door docenten, het korte tijdsbestek van het project en problemen bij de reservering van een computerlokaal.

Noten

[1] Zie: *http://taalunieversum.org/onderwijs/gemeenschappelijk_europees_referentiekader/9/3/5/*

[2] *SmartWiskunde* is de wiskundevariant van *SmartRekenen*; zie: *www.eduhint.nl/*

Literatuur

[a] Ministerie van OCW: *Scholen voor morgen. Samen op weg naar duurzame kwaliteit in het primair onderwijs*. Den Haag: Kamerstuk OCW.

[b] G.H. Gregory, L. Kuzmich (2004): *Data Driven Differentiation in the Standards-Based Classroom*. Thousand Oaks (CA, USA): Corwin Press.

[c] G. Ledoux, H. Blok, M. Boogaard (2009): *Opbrengstgericht werken; over de waarde van meetgestuurd onderwijs*. Amsterdam: SCO-Kohnstamm Instituut.

[d] 1] P. Black, D. Wiliam (1998). *Inside the black box: Raising standards through classroom assessment*. In: *Phi Delta Kappan*, vol. 80; pp. 139-148.
2] J.A. Hattie (2009). *Visible Learning: A synthesis of meta-analyses in education*. London: Routledge.

[e] P. Black, C. Harrison, C. Lee, B. Marshall, D. Wiliam (2003): *Assessment for learning: putting it into practice*. Maidenhead, Berkshire (UK): Open University Press.

[f] J.L.J. Tolboom (2012): *The potential of a classroom network to support teacher feedback. A study in statistics education*. Groningen: Rijksuniversiteit Groningen; proefschrift.

[g] J.B. Kuhlemeier, M. Martinnot (1986): *Belevingsschaal voor wiskunde. The attitude-scale towards mathematics*. Arnhem: Cito.

[h] P.R. Pintrich, D.A.F. Smith, T. Garcia, W.J. McKeachie (1993): *Reliability and Predictive Validity of the Motivated Strategies for Learning Questionnaire* (Mslq). In: *Educational and Psychological Measurement* 53(3); pp. 801-813.

Over de auteurs

Victor Schmidt (e-mailadres: *v.schmidt@slo.nl*) is leerplanontwikkelaar wiskunde bij de SLO, nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling.
Jos Tolboom (e-mailadres: *j.tolboom@slo.nl*) is leerplanontwikkelaar wiskunde bij de SLO, nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling.

Vastgeroest

[Ab van der Roest]

Als docent heb je van die vaste gewoontes bij de uitwerking van bepaalde sommen. Die gewoontes zijn soms zo vast, dat je nauwelijks openstaat voor andere methodes. Zo is voor velen vanzelfsprekend dat bij 'delen door een breuk' hoort: 'vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk'. Zo ook voor Ab van der Roest. In dit artikel vertelt hij hoe hij ontdekte dat het ook anders kan.

In een gesprek over wiskunde en wiskundeonderwijs werd me de vraag gesteld hoe ik zou reageren wanneer een leerling de volgende berekening zou doen:

$$\frac{9}{8}:\frac{3}{4}=\frac{9:3}{8:4}=1\frac{1}{2}$$

Mijn eerste impuls was dat de leerling een fout maakte. Maar na even rekenen zag ik dat het antwoord goed was. Is het toevallig goed, of is deze methode altijd goed?

Eerst nog een getallenvoorbeeld. Dit voorbeeld klopte ook en daarmee krijg je dan het vermoeden dat het altijd goed is.

Hier komt de wiskunde om de hoek kijken, want van de voorbeelden naar een algemeen bewijs kan natuurlijk met behulp van algebra.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}=\frac{ad:cd}{bc:cd}=\frac{a:c}{b:d}$$

En dus altijd waar.

Ik gebruik hierboven: 'delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk' wat ook met algebra weer makkelijk te bewijzen is:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{\frac{a}{b}\cdot bd}{\frac{c}{d}\cdot bd}=\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

Ik kwam hierover in gesprek met een aantal docenten van groep 8 van een basisschool. Ik gaf hun het voorbeeld en vroeg: 'Goed of fout?' Ook hier de primaire reactie dat het fout was, maar aarzelend het toegeven dat het antwoord wel goed was. Op de vraag van mij of ze deze methode ook goed zouden rekenen op een proefwerk kwam een snelle reactie: 'Nee!'

Waarom iets fout rekenen als het goed is? Schiet de rekendocent tekort omdat hij onvoldoende wiskunde beheerst? De docent veronderstelde dat de leerling een trucje deed, terwijl de 'gewone' methode (vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk) een kwestie van inzicht was. Ik waag dit te betwijfelen.

Overigens is de methode gelijkwaardig met de vermenigvuldiging van breuken:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Tellers en noemers moeten met elkaar vermenigvuldigd worden.

Omdat vermenigvuldigen en delen gelijkwaardige bewerkingen zijn, mag je dus ook gewoon tellers en noemers op elkaar delen. Ik veronderstel dat het voor kinderen zelfs makkelijker wordt. Zijn de uitkomsten niet meteen mooi, dan moeten teller en noemer met een getal vermenigvuldigd worden, zodat er een 'gewone' breuk uitkomt. Voorbeeld:

$$\frac{2}{7}:\frac{3}{5}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 15}{\frac{7}{5}\cdot 15}=\frac{2\cdot 5}{7\cdot 3}=\frac{10}{21}$$

En we zien het vermenigvuldigen met het omgekeerde van de breuk weer terug.

Ik ken de didactiek van het rekenen niet, maar ik veronderstel dat de methode van het voorbeeld voor een leerling wel eens veel makkelijker kan zijn.

Over de auteur
Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadres: *a.b.vanderroest@ziggo.nl*





Jaarvergadering/ Studiedag 2013

Eerste uitnodiging
Dit is de eerste uitnodiging voor de Jaarvergadering/studiedag 2013 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op **zaterdag 9 november 2013**.
Aanvang: 10:00 uur
Sluiting: 16:00 uur
Plaats: Ichthus College, Vondellaan 4, 3906 EA Veenendaal

Themagedeelte van de studiedag
Krachtig vooruit met wiskunde!
De vernieuwingen binnen het (wiskunde) onderwijs blijven op ons afkomen. We willen ze graag centraal zetten op de studiedag en samen met u bekijken hoe we daarmee krachtige, nieuwe impulsen aan het onderwijs in ons geliefde vak kunnen geven. Wij zien graag dat er met (vernieuwd) elan wordt ingehaakt op die vernieuwingen. Uiteraard zijn daar de plannen van cTWO voor de eindexamenprogramma's havo/vwo waarvan de invoering nu echt dichterbij gaat komen. Een krachtige voorbereiding op de inhoud en de onderliggende ideeën die doorklinken in *Denken & doen* via professionalisering lijkt zeker geen overbodige luxe. Het klinkt positief en we hebben er zin in om met mooie programma's verder te komen. Dat geldt zeker ook voor de tussendoelen (onderbouw vmbo/havo/vwo). Daarnaast liggen er ook veel kansen om de didactiek aan te passen aan de nieuwe mogelijkheden die ICT biedt. Denk daarbij aan het gebruik van Geogebra en andere freeware, ervaringen met iPads of smartphones en andere middelen om te gaan werken op een manier waarbij je minder afhankelijk wordt van het gebruik van een van de beschikbare papieren lesmethoden.
Bij al die vernieuwingen staat voorop dat we onze leerlingen aan het 'denken' willen krijgen waarbij het 'doen' uiteraard een nodige voorwaarde is om het 'denken' te ondersteunen.
Het wordt al een aantal jaren gesignaleerd door ons: er is steeds weinig aanbod van workshops vanuit het veld. Verras ons en meld u aan met een interessant aspect van uw lesgeven!
Omdat het definitieve programma van de studiedag begin september op de NVvW-website moet staan, hopen we dat u zich *vóór eind juni* meldt. De échte deadline is 15 augustus.
We zien graag bijdragen voor:
- invullingen bij nieuwe onderwerpen van de nieuwe examenprogramma's havo/vwo;
- de professionalisering via de regionale bètasteunpunten;
- invullingen bij de nieuwe tussendoelen;
- het aanhaken bij andere vakken dan wiskunde in vmbo/havo/vwo;
- het gebruik van nieuwe ICT-middelen in het onderwijs.

Voorstellen voor workshops kunt u sturen naar Lidy Elzinga (e-mailadres: *L.J.B.Elzinga@uva.nl*) of naar Henk van der Kooij (e-mailadres: *h.vanderkooij@uu.nl*).

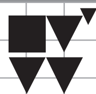
Agenda
Huishoudelijk gedeelte, 10:00-10:50 u
1. Opening door de voorzitter, mevr. M. Kollenveld.
2. Jaarrede door de voorzitter.
3. Notulen van de jaarvergadering 2012 (zie een volgend nummer van *Euclides*).
4. Jaarverslagen NVvW en *Euclides* (zie een volgende nummer van *Euclides*).
5. Verslag kascommissie, decharge van de penningmeester, vaststelling van de contributie en benoeming van een nieuwe kascommissie.
6. Bestuursverkiezing. Er zijn bestuursleden aftredend. Tot 28 dagen na het verschijnen van deze uitnodiging kunnen bestuurskandidaten schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden.
7. Rondvraag. Leden die een vraag in de rondvraag willen stellen, wordt verzocht deze vóór de vergadering in te dienen bij de secretaris (e-mailadres: *secretaris@nvvw.nl*).
8. Sluiting van de jaarvergadering.

Programma Studiedag

10:50-11:00 u	Inleiding op de studiedag
11:00-11:45 u	Plenaire lezing
11:45-12:00 u	Koffie/thee
12:00-13:00 u	Workshops, 1e ronde
13:00-14:00 u	Lunchpauze, marktbezoek
14:00-15:00 u	Workshops, 2e ronde
15:00-15:20 u	Koffie/thee
15:20-16:00 u	Plenaire voordracht
16:00-16:10 u	Afsluiting

Dus reserveer in uw agenda: zaterdag 9 november NVvW-dag.
In een volgend nummer van *Euclides* krijgt u nadere informatie over wat u kunt verwachten op 9 november 2013.

Voor meer praktische informatie over de organisatie kunt u zich eventueel wenden tot Marianne Lambriex (e-mailadres: *m.lambriex@nvvw.nl*).



Kennisbasis en kennistoetsen

VOOR TWEEDEGRAADS LERARENOPLEIDINGEN

[Douwe van der Kooi]

In 2009 berichtte ik in *Euclides* over de kennisbases die ontwikkeld worden voor alle lerarenopleidingen, zowel voor de bachelors (tweedegraads) als voor de masters (eerstegraads).[1] Inmiddels zijn we een paar jaar verder. De tijd heeft niet stilgestaan, maar ook de verdere ontwikkelingen niet. Alle opleidingen, zowel de bachelors als de masters, hebben nu de landelijke kennisbasis van hun vak geïmplementeerd in het curriculum. Nu was dat niet zo'n revolutie. De opleidingen, zeker de wiskundeopleidingen in Nederland, kennen traditioneel een stevige vakinhoudelijke component. Volstrekt nieuw is dat alle bachelorstudenten door het afleggen van een landelijke toets moeten aantonen die kennisbasis ook daadwerkelijk te beheersen. Anders gezegd: er komt een soort landelijk eindexamen voor de studenten van de tweedegraads lerarenopleidingen. De toetsing heeft digitaal plaats en gebeurt derhalve in de vorm van meerkeuzevragen. Voor wiskunde gaat het om ongeveer 60 vierkeuzevragen, waarvoor studenten twee uur de tijd krijgen. Er wordt na elke toetsafname een landelijke cesuur vastgesteld. Studenten mogen pas deelnemen wanneer ze ongeveer driekwart van hun studie hebben afgerond, dus pakweg vanaf halverwege het derde jaar van hun opleiding. De toets wordt driemaal per jaar aangeboden en studenten mogen jaarlijks maximaal twee keer meedoen. Wiskundestudenten die in het studiejaar 2011-2012 zijn begonnen – dus de huidige tweedejaars – vormen het eerste cohort dat met deze landelijke toetsing te maken krijgt. De eerste afname heeft plaats op dinsdag 17 september 2013 van 16-18 uur. De beheerorganisatie is robuust opgezet. Inmiddels is er een landelijke examencommissie, die onder meer verantwoordelijk is voor de cesuurbepaling. Er is een landelijk vakoverleg opgericht dat geregeld rapporteert over de inhoudelijke kwaliteit van de toetsing en er is een kwaliteitscommissie die de toetsvragen evalueert op de toetstechnische merites. Al deze instanties, die elk vanuit een eigen verantwoordelijkheid betrokken zijn bij de kwaliteit van de toetsing, gaan opereren onder een regievoerende coöperatie. Voor wiskunde is er overigens al jaren een goed georganiseerd landelijk vakoverleg van de opleidingscoördinatoren, die bijvoorbeeld ook de jaarlijkse LIO-dag organiseren als onderdeel van het programma op de studiedag van de NVvW.

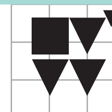


Voor de communicatie over de voortgang van het project is de website van '10voordeleraar' (*http://10voordeleraar.nl*) een belangrijk medium. Daar staan ook oefentoetsen. Voor iedereen is het 'proeflokaal' toegankelijk, maar je moet wel een wachtwoord aanvragen. Informatie daarover staat op de site. Het is aardig eens zo'n oefentoets te maken en voor jezelf een oordeel te vormen over bijvoorbeeld het niveau. Overigens is het wel belangrijk om te weten dat dit niet de enige toetsing is op de lerarenopleidingen. In tegendeel. Gedurende zijn opleiding wordt de student permanent getoetst op de beheersing van kennis en vaardigheden. Deze landelijke eindtoets stelt de beheersing van het basisniveau vast in termen van voldoende of onvoldoende. In het laatste geval, wanneer je dus de toets onvoldoende maakt, voldoe je niet aan de vakinhoudelijke eisen die gesteld worden aan een startbekwaam docent. Zo moet de eindtoets worden gezien als een noodzakelijke, maar niet voldoende voorwaarde om als docent zelfstandig les te kunnen geven. Immers, daar komt (veel) meer bij kijken.
Hoe kan de student zich voorbereiden op deze toets? Opleidingen gaan studenten uiteraard wijzen op de oefentoetsen op de site van '10voordeleraar'. Die toetsen kunnen jaarlijks worden afgenomen en zo functioneren als voortgangstoets. Studenten wennen dan aan deze vorm van toetsing en krijgen jaarlijks een beeld van hoever ze zijn, gelet op de eindtoets. De redactiecommissies hebben een gedetailleerde toetsmatrijs opgesteld waarin helder staat aangegeven hoeveel vragen over welke domein de student in de eindtoets kan verwachten.

Tot slot. Voor de masteropleidingen zijn ook landelijke kennisbases vastgesteld. In tegenstelling tot de bacheloropleidingen worden geen landelijke kennistoetsen afgenomen om vast te stellen of de student daadwerkelijk de kennisbasis beheerst. Wel zijn er duidelijke afspraken gemaakt over een landelijke screening van de opleidingen. Daarbij gaat het om de vraag hoe de kennisbases in de curricula zijn ingedaald en hoe de toetsing op instituutsniveau plaatsheeft.

Noot

[1] Douwe van der Kooi (2009): *De kennisbasis in de lerarenopleidingen.* In: *Euclides* 84(8), juli-nummer; pp. 311-312.



Verslag raadpleging rapport cTWO

[Lidy Elzinga en Ab van der Roest, bestuursleden NVvW]

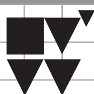
Het ministerie van OCW wilde graag weten hoe het eindrapport van cTWO, *Denken & doen / wiskunde op havo en vwo per 2015*, door het veld ontvangen is.[1] Het bestuur van de NVvW werd om die reden uitgenodigd te reageren op dit rapport. De tijd die we als bestuur kregen, was echter beperkt. Het eindrapport verscheen op 9 januari 2013 en ons werd gevraagd vóór eind januari te reageren. Het leek het bestuur verstandig om een ledenraadpleging te organiseren, want niet alleen de mening van het bestuur is belangrijk, maar ook uw mening als lid van de vereniging. Vandaar dat er is besloten over te gaan tot een digitale enquête.
De conclusies en aanbevelingen [1] van cTWO zijn door de leden beoordeeld met een cijfer op een schaal van 1 tot 4. De 1 werd gekozen als men het helemaal eens was met de conclusie of aanbeveling; de 4 als men het helemaal oneens was. Op deze wijze werd het mogelijk snel de enquête te evalueren. Bij een gemiddelde van 2,5 zou de mening neutraal zijn. Een gemiddelde lager dan 2 betekent instemming en een gemiddelde van hoger dan 3 afwijzing van aanbeveling of conclusie.
De leden kregen naast een melding in de *WiskundE-brief* een e-mail met de uitnodiging de enquête in te vullen.
De enquête is naar 1786 adressen verstuurd en 99 leden hebben gereageerd. Dat is dus een respons van 5,5%. Dat lijkt laag, maar omdat er binnen een zeer korte tijd gereageerd moest worden, zijn we als bestuur toch heel tevreden met deze respons. De resultaten van de enquête vindt u in de tabel ***in figuur 1***. In de laatste kolom van die tabel staan de gemiddeldes per vraag.
Het bestuur heeft een brief gestuurd aan het ministerie van OCW en de belangrijkste delen hieruit worden hieronder vermeld.

De door cTWO ontwikkelde programma's worden in het algemeen positief gewaardeerd. En alle conclusies en aanbevelingen worden in meerderheid onderschreven.
Over wiskunde D zijn de meningen erg positief. Het vak biedt een goede voorbereiding op vervolgopleidingen bèta en techniek. Tegelijkertijd maakt men zich zorgen over de positie van wiskunde D: het vak wordt niet op alle scholen aangeboden en de groepen zijn vaak klein. De positie van wiskunde D zou verstevigd moeten worden.
De aanbeveling om wiskunde B verplicht te stellen als vooropleiding voor de technische studies wordt vrijwel unaniem ondersteund. Tegelijkertijd is men sterk voorstander van het verhogen van het aantal studielasturen voor wiskunde B op de havo, omdat dit vak wel erg kaal en eenzijdig is geworden (***zie figuur 2***).
Er is massale bijval voor de conclusie dat er bij wiskunde A geen goede invulling is voor zowel E&M als voor N&G. Er is een voorkeur om wiskunde B bij N&G het profielvak te laten zijn.
De geringe groepsgrootte bij wiskunde C is een bron van zorg (***zie figuur 3***). Docenten geven aan dat de C-leerlingen er een beetje bij hangen en soms bij wiskunde A worden ondergebracht.
Nogal wat respondenten zijn bezorgd over het geringe aantal lesuren bij het kernvak wiskunde. Gevolg daarvan kan zijn dat de onderwerpen voor het centraal examen de hoogste prioriteit krijgen waardoor de eigen invulling van het schoolexamen onder druk komt te staan.
Er is duidelijk behoefte aan nascholing bij de nieuwe onderdelen en aspecten in de programma's zoals statistiek, analytische meetkunde en wiskundige denkactiviteiten. Ook wil men op die terreinen voorbeelden van examenopgaven.
De vernieuwingscommissie heeft de problemen die er in havo en vwo zijn met de verschillende wiskundeprogramma's, helder in kaart gebracht. Door binnen de bestaande structuur alleen de programma's zelf te vernieuwen zijn niet alle problemen opgelost. Daarom ondersteunen we het pleidooi voor een structurele oplossing in de toekomst. Dat komt ook tot uitdrukking in de steun voor de laatste aanbeveling waarin wordt gevraagd op termijn te komen tot twee stevige vakken, een **wiskunde** α voor de M-profielen en een **wiskunde** β voor de N-profielen.

Bij de conclusies en aanbevelingen zit geen vraag over het mogelijk in te voeren vak wiskunde C voor havo. Daarover zijn dan ook geen inhoudelijke opmerkingen gemaakt. Toch hechten wij eraan u te herinneren aan het standpunt dat we enige tijd geleden hebben ingenomen, namelijk dat we een invoering van dit vak wiskunde C op de havo onwenselijk vinden. De combinatie met de verplichte rekentoets 3F, de onmogelijkheid voor leerlingen met een vmbo-diploma zonder wiskunde om door te stromen naar havo en de te verwachten zeer kleine groepen, zijn daarbij door ons als argumenten opgevoerd.

Het vrije invoerveld bij de enquête gaf ook een aantal gemeenschappelijk reacties. Een opmerking die meerdere keren terug kwam, had betrekking op het niveau. Een aantal respondenten pleit ervoor om dat niveau





toch goed te bewaken bij die veranderingen. De onderwerpen die tot het curriculum behoren, zijn belangrijk, maar belangrijker is bij elk onderwerp een juist wiskundig niveau te borgen. De wiskunde zou weer meer abstract mogen worden; de GR zou bij wiskunde B afgeschaft mogen worden; het huidige B-programma is te saai en te schraal.
De discussie over deze onderwerpen zal zeker gevoerd moeten worden. De meningen hierover zijn divers. Het gesprek over de programma's gaat nog steeds door. Er is een veldraadpleging geweest (of zal er binnenkort zijn). Een uitgelezen kans om over het nieuwe examenprogramma te spreken, en over de invoering in de klas kunnen we het hebben als de nascholingen georganiseerd gaan worden. Gelukkig is uit de enquête gebleken dat er behoefte is om over het nieuwe programma te praten en na te denken over de invoering in de klas bij nascholingen.
We hopen elkaar daar dan te treffen.

Noot [Red.]

[1] Zie voor het volledige rapport (ca. 20 Mb): *www.fisme.science.uu.nl/ctwo/publicaties/docs/CTWO-Eindrapport.pdf* De 15 conclusies zijn daarin te vinden op pp. 10-21; de 10 aanbevelingen op pp. 14-25.

	aantal 1	2	3	4	gemiddeld
conc 1	28	52	7	4	1,9
conc 2	23	54	9	3	1,9
conc 3	26	46	12	5	2,0
conc 4	51	24	14	2	1,6
conc 5	10	54	16	4	2,2
conc 6	56	24	7	4	1,5
conc 7	15	34	27	11	2,4
conc 8	71	15	2	5	1,4
conc 9	22	47	17	7	2,1
aanb 1	72	17	2	1	1,3
aanb 2	35	31	15	14	2,1
aanb 3	54	30	8	1	1,5
aanb 4	72	16	3	1	1,3
conc 10	29	47	11	4	1,9
conc 11	29	42	14	2	1,9
conc 12	61	24	6	2	1,5
conc 13	62	18	8	6	1,6
aanb 5	61	21	6	4	1,5
conc 14	29	48	10	5	1,9
conc 15	5	48	29	9	2,5
aanb 6	39	31	16	9	1,9
aanb 7	81	8	4	1	1,2
aanb 8	55	21	12	5	1,6
aanb 9	40	34	15	5	1,8
aanb 10	50	17	16	12	1,9

conc = conclusie, aanb = aanbeveling uit 'Denken & doen

figuur 1



figuur 2



figuur 3

PUZZEL 88-6
CONSTRUCTIE VAN EN UIT DE OUDE DOOS

[Lieke de Rooij en Wobien Doyer]

Deze puzzel is ontstaan in samenwerking met Ton Lecluse met een opgave uit zijn 'oude doos'. De eerste opgave komt uit die doos.

Gegeven een driehoek *ABC* met de bissectrices *AD*, *BE* en *CF* die elkaar snijden in *S*.
De driehoek (***zie figuur 1***) heeft zijden $a = 7$, $b = 5$ en $c = 8$ ($a = BC$, $b = AC$ en $c = AB$).

Opgave 1
Bewijs dat $|ES| = |FS|$.

Nu in het algemeen en omgekeerd: we bekijken alle niet-gelijkbenige driehoeken *ABC* met bissectrices *AD*, *BE* en *CF* waarbij $|ES| = |FS|$.

Opgave2
In al deze driehoeken moeten de hoeken aan één simpele eis voldoen.
a. Welke eis is dat?
b. Bewijs dat die eis nodig en voldoende is om te voldoen aan de voorwaarde dat $|ES| = |FS|$.

De driehoek *ABC* van opgave 1 is een scherphoekige driehoek en de zijden zijn geheeltallig. Er bestaat ook een geheeltallige stomphoekige driehoek met zijden $a = 7$, $c = 8$ en $|ES| = |FS|$. Die driehoek noemen we de *stomphoekige partner* van driehoek *ABC*.

Opgave 3
Toon aan dat alle scherphoekige geheeltallige driehoeken *ABC* met $|ES| = |FS|$ steeds zo'n geheeltallige stomphoekige partner hebben.

Het is overigens mogelijk om alle geheeltallige driehoeken met $|ES| = |FS|$ te bepalen op een vergelijkbare manier als dat kan voor alle Pythagoras-tripletten. Leuk om zelf te bedenken of op te zoeken op internet.

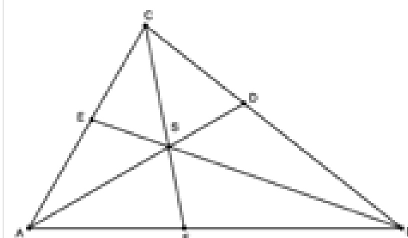
De driehoek uit de oude doos (***in figuur 1***) bracht ons op het idee om een doos voor Ton te construeren, waar hij nog heel veel in kan stoppen. Daartoe eerst een opgave uit het moderne schoolboekje.

Opgave 4
Op een rechthoekig stuk karton van *p* bij *q* worden lijnen getekend op afstand *h* van de zijkanten; ***zie figuur 2***. Rits het karton langs de stippellijnen (= half inkerven) en snijdt het langs de getrokken lijnstukjes geheel door. Vouw de zijflappen naar achteren zodat er een doos ontstaat met hoogte *h*. Plak of niet de vierkante hoekjes vast.
De hoogte *h* wordt zo gekozen dat de inhoud van de doos maximaal is.
Druk *h* uit in *p* en *q*.

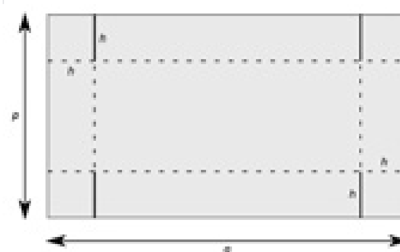
Opgave 5
Hoe kan u met passer, lat en een keukenmesje de doos met maximale inhoud construeren uit een gegeven rechthoekig stuk karton, en wat heeft dat te maken met de opgave van Ton uit de oude doos?

Tip – Een rode draad door dit geheel is de cosinusregel.

Inzenden oplossingen
Oplossingen kunt u mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of opsturen naar L. de Rooij, Oudeweg 27, 2811 NN Reeuwijk.
Naast de maximaal 20 punten die u kan verdienen met de puzzel, geven we extra punten voor bruikbare ideeën voor nieuwe puzzels.
De persoon die het hoogst op de ladder staat, ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro.
De deadline is **20 juni a.s.** Veel plezier.



figuur 1

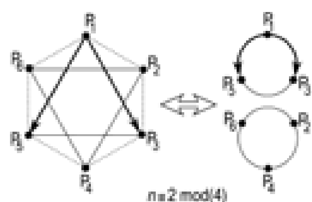


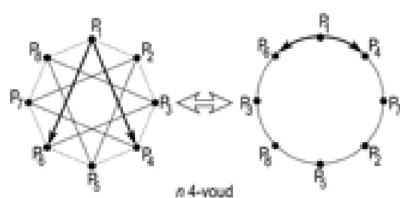
figuur 2

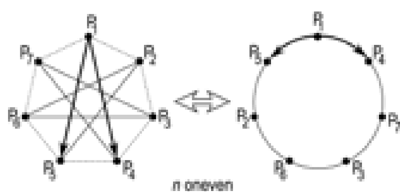
Noot
[1] Zie WikipediA (*http://en.wikipedia.org/wiki/Conic_section*):
(…) a conic section (…) is a curve obtained as the intersection of a cone (more precisely, a right circular conical surface) with a plane.

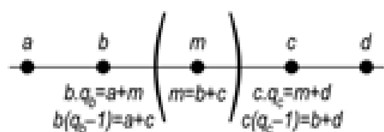
OPLOSSING VAN 88-4
OVERBUREN

[Wobien Doyer en Lieke de Rooij]


figuur 1a


figuur 1b


figuur 1c


figuur 2

Harm Bakker gaf deze puzzel de alternatieve titel 'Gluren bij de buren'.
De opgaven gingen over een regelmatige n-hoek waarvan aan elk hoekpunt een getal moet worden toegewezen, zodanig dat elk getal een deler is van de som van de getallen van z'n overburen. Voor elk punt P met n oneven zijn dat de twee punten B_1 en B_2 die het verst van P afliggen en voor n even de beide punten naast de directe overbuurman.
Opgave 1 – Hierbij moesten voor $n = 5$ tot en met $n = 9$ alle mogelijke oplossingen worden bepaald voor de getallen 1, 2, …, n.
Hier had niemand problemen mee:
$n = 4$: 1, 2, 3, 4
$n = 5$: 1, 3, 5, 2, 4 en 1, 3, 2, 4, 5
$n = 6$: geen
$n = 7$: 1, 3, 5, 7, 2, 4, 6 en 1, 3, 4, 6, 2, 7, 5
$n = 8$: 1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6
$n = 9$: 1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8 en 1, 3, 9, 6, 8, 2, 4, 5, 7
Dit geeft meteen een vermoeden welke oplossingen er voor grotere waarden van n zijn te verwachten, zoals voor $n = 2013$ met de getallen 1, 2, …, 2013 (**opgave 2a**).
Enkele inzenders zagen dat het gemakkelijker wordt als je de hoekpunten ziet als de knopen van een graaf, waarbij elke knoop P wordt verbonden met de bijbehorende B_1 en B_2, zodat overburen naaste buren worden van P; ***zie de figuren 1a, 1b en 1c***.
In de rest van dit artikel beperken we ons daarom tot cykels waarbij elk punt een deler is van de som van z'n twee naaste buren.

Twee niet zo moeilijk te bewijzen eigenschappen zijn:
- De graaf bestaat uit één of twee cykels. Harm Bakker bekeek de ggd van n en de afstand tussen P tot B_1 op de n-hoek. Als $n \not\equiv 2 \bmod (4)$ geldt ggd = 1. Dan bestaat de graaf uit één stervormige cykel die alle punten bevat. Voor $n \equiv 2 \bmod (4)$ is de ggd = 2 en valt de graaf uiteen in twee cykels van gelijke grootte.
- Alle even punten hebben twee oneven buren, of als er twee even punten naast elkaar liggen, ontstaat er een kettingreactie zodat alle punten op die cykel even zijn.

Opgave 2b – Bestaat er een oplossing voor $n = 2013$ met de getallen 2, …, 2014?
Met n oneven is er sprake van één cykel en omdat er nu meer even dan oneven getallen zijn, staan er ergens twee even punten naast elkaar en worden alle punten even. Kan dus niet.

Opgave 3 – Bepaal en bewijs hoeveel oplossingen er minimaal zijn afhankelijk van de waarde van n mod (4).
De meeste inzenders bewezen de existentie van het juiste aantal oplossingen: 1 voor 4-vouden, 0 voor $n \equiv 2 \bmod (4)$ en 2 voor oneven n. Bewijzen dat er niet meer oplossingen zijn, bleek lastig en was, behalve voor $n \equiv 2 \bmod (4)$, strikt genomen ook niet verplicht.
» $n \equiv 2 \bmod (4)$ – De graaf bestaat uit twee cykels van gelijke grootte met oneven aantal knopen. Een van die twee bevat dus meer even dan oneven getallen. Ergens staan er dan twee even getallen naast elkaar.
Gevolg. Die cykel bevat alle even getallen en de andere dus alle oneven getallen. Het grootste oneven getal is gelijk aan de som van z'n buren, maar die zijn beide ook oneven en dus samen even. Kan dus niet.
» $n \not\equiv 2 \bmod (4)$ – Dit valt te bewijzen door de mogelijke volgorden van de grootste paar getallen en hun buren te bekijken.
Met name als n oneven wordt dit echter al gauw een vrij ingewikkeld betoog.

Een alternatief – Omdat het getal op elk hoekpunt een veelvoud is van de som van zijn buren, hoort bij elk hoekpunt een geheel quotiënt q. **Frits Göbel** telde die quotiënten op en vond bij al zijn oplossingen als som van die quotiënten $3n - 1$. Deze mooie bewering bracht ons op het idee voor een eleganter bewijs dat bovendien nog een aantal leuke conclusies opleverde.
Structuur van het bewijs: *afbraak*, *opbouw* en *volledige inductie*.
We beginnen met afbraak en bewijzen bovengenoemde bewering, maar met uitbreiding tot grafen met andere

getallenverzamelingen dan 1 t/m n.
Dan volgt het verdere bewijs van opgave 3 door opbouw en volledige inductie.

Q-grafen

We definiëren: Een *Q-graaf* is een circulaire graaf waarin bij elke knoop een natuurlijk getal p hoort en waarin bij elke p een geheel quotiënt q hoort, zodat $p \cdot q$ = (som van de buren) en waarbij S = (som van alle quotiënten q).
We bekijken alle Q-grafen, met 1 of meer knopen, ook met getallen anders dan $1, 2, \ldots, n$.

Afbraak – We gaan zo'n Q-graaf afbreken tot een kleinere Q-graaf tot alle getallen gelijk zijn. Dat kan altijd door een van de punten met de grootste waarde = m weg te laten.
Bewijs. Als er twee grootste getallen m naast elkaar staan, moeten alle getallen gelijk zijn aan m, en zijn we klaar. Zo niet, dan heeft m dus twee kleinere buren. Stel m staat in het rijtje a, b, m, c, d (bij $2 < n < 5$ overlappen de uiteinden elkaar).
Dan geldt: $m = b + c$ en $b \cdot q_b = a + m = a + (b + c)$, zodat $b(q_b - 1) = a + c$.
b is dus deler van $a + c$, en analoog is c deler van $b + d$; ***zie figuur 2***.
Gevolg. Als we m weglaten, ontstaat een kleinere Q-graaf. De nieuwe q bij b en c is nu bij allebei één minder. Het quotiënt van m was 1 en verdwijnt. Totaal wordt S dus 3 minder. Hoewel de redenering voor n = 2 anders is (de uiteinden overlappen dan ook m) wordt S ook dan 3 kleiner. We gaan door met grootste getallen weghalen tot alle getallen gelijk zijn. Dan geldt steeds $q = 2$.
Gevolg voor de oorspronkelijke S:
$S = 3(n - k) + 2k = 3n - k$
waarbij k = (aantal kleinste gelijke getallen).
Voor alle Q-grafen geldt:
$S = 3n - k$, met n = (aantal knopen) en k = (aantal van het kleinst voorkomende getal).
In het bijzonder voor de getallen 1 t/m n geldt $k = 1$ en hebben we een bewijs voor de bewering van Frits Göbel.

Opbouw – Je kan dus, door steeds een van de grootste getallen weg te laten, alle Q-grafen successievelijk afbreken tot kleinere Q-grafen. Dus kan je ook omgekeerd alle Q-grafen verkrijgen door met een of meer gelijke getallen te beginnen en steeds grotere getallen m in te voegen tussen twee getallen die samen m zijn.
We zien uit de opbouw dat in de Q-grafen alle getallen een veelvoud zijn van de kleinste, zeg p. Als eerste kunnen we alleen één of meer keren het getal $2p$ invoegen en vervolgens alleen $3p$. Gevolg:
Alle Q-grafen met 3 of meer verschillende getallen bevatten de getallen p, $2p$ en $3p$.
Delen we alles door p, dan is dat 1, 2, 3.

Bewijs opgave 3

Nu bekijken we de mogelijkheden voor de getallen 1 t/m n, elk één maal.
We bewijzen eerst: als $n = 2t$ (dus n is even) dan bestaat er precies één Q-graaf en daarin staan de getallen 1 t/m n in volgorde.
Inductie naar t
Inductiebegin – Als $t = 1$ ($n = 2$) hebben we een Q-graaf met alleen de getallen 1 en 2 en is de stelling triviaal.
Inductiehypothese – Stel voor een zekere even $n = 2t$ bestaat er precies één Q-graaf en daarin staan alle getallen 1 t/m n in volgorde.
Inductiestap – In de graaf met $n = 2t$ zijn er precies twee plaatsen waar de som van twee naast elkaar gelegen getallen gelijk is aan $n + 1$, zodat het getal $n + 1$ daar kan worden ingevoegd.
We krijgen zo precies twee grotere Q-grafen, nu met een oneven aantal knopen:
a) $n + 1$ staat tussen 1 en n geeft een Q-graaf met alle getallen in volgorde;
b) $n + 1$ staat tussen t en $t + 1$. Alle getallen in het gelid, behalve de grootste.

In die twee Q-grafen is er alleen in geval a) precies één plek waar twee opvolgende getallen samen gelijk zijn aan $n + 2$ en dat is tussen 1 en $n + 1$. Uitbreiding tot een grotere Q-graaf kan dan maar op één manier en dat geeft weer precies één Q-graaf met $n + 2 = 2(t + 1)$ knopen en alle getallen op een rij. Hetgeen te bewijzen was.

We hebben daarmee tevens het bewijs dat er precies twee mogelijkheden zijn bij oneven n. Bij de inductiestap vonden we na elke even n precies 2 oplossingen voor het oneven getal daarboven. Voor $n = 3$ zijn die oplossingen echter identiek, maar voor grotere n zijn ze verschillend.

Conclusie – Voor alle even n en voor $n \leq 3$ is er *één* oplossing en voor alle oneven $n > 3$ zijn er *twee* oplossingen om de getallen zo te plaatsen dat elk getal een deler is van z'n buren.
Voor $n \not\equiv 2 \bmod (4)$ kunnen we de Q-grafen opvouwen tot de n-hoek ($n > 2$) die voldoet aan de spelregels van de puzzel wat betreft overburen.

Ladderstand

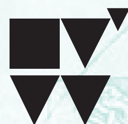
De top van de ladder ziet er nu als volgt uit:
H. Bakker 110
L. Pos 95
G. Riphagen 92
J. Remijn 87
H. Klein 63
H. Linders 58
F. Göbel 58
T. Kool 57
K. Vugs 57
R. Stolwijk 55
De ladderprijs is gewonnen door Harm Bakker. Hartelijk gefeliciteerd daarmee!

SERVICEPAGINA

Voor overige internet-adressen zie:
www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php

Forum op de NVvW-site:
www.nvvw.nl/forum.html

Publicaties van de Nederlande Vereniging van Wiskundeleraren



Zebraboekjes

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid
27. Kunst en Wiskunde
28. Voorspellen met Modellen
29. Getallenbrouwerij
30. Passen en Meten met Cirkels
31. Meester Ludolphs Koordenvierhoek
32. Experimenteren met rijen
33. Ontwikkelen met Kettingbreuken
34. De Ster van de dag gaat op en onder

Zie verder ook *www.nvvw.nl/page.php?id=7451* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

Oude nummers

Oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur, het liefst via e-mail (*dklingens@gmail.com*). Hieronder staan de verschijningsdata van *Euclides* in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*

jaargang 88

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
7	25 juni 2013	29 apr 2013

jaargang 89

1	17 september 2013	24 jun 2013
2	5 november 2013	2 sep 2013
3	17 december 2013	28 okt 2013
4	7 februari 2014	2 dec 2013
5	25 maart 2014	27 jan 2014
6	13 mei 2014	17 maa 2014
7	24 juni 2014	6 mei 2014

vrijdag 17 mei, op de scholen
CE havo wiskunde A/B (13:30-16:30u)
Organisatie CvE

dinsdag 21 mei, Utrecht
Centrale examenbespreking havo A/B
Organisatie NVvW

woensdag 22 mei, op de scholen
CE vmbo-KB/GL/TL wiskunde (13:30-15:30u)
CE vwo wiskunde A/B/C (13:30-16:30u)
Organisatie CvE

vrijdag 24 mei, op de scholen
CE vmbo-BB wiskunde (9:00-10:30u)
Organisatie CvE

vrijdag 24 mei, Utrecht
Centrale examenbespreking vmbo-TGK
Centrale examenbespreking vwo A/B/C
Organisatie NVvW

maandag 3 juni, Apeldoorn
Studiemiddag: Gepersonaliseerd leren bij wiskunde
Organisatie: Stichting Math4all en Platform PulseOn

donderdag 6 juni, Amersfoort
Conferentie: Rekenen in andere vakken
Organisatie o.a. Steunpunt Taal en Rekenen VO, en APS

vrijdag 7 juni, Utrecht
Wiskunde D-dag
Organisatie PWN

za. 27 t/m wo. 31 juli, Enschede
Bridges 2013: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture
zondag 28 juli: Familiedag
woensdag 31 juli: Excursiedag
Organisatie Universiteit Twente, Saxion Hogeschool e.a.

zaterdag 9 november 2013, Veenendaal
Jaarvergadering/Studiedag 2013
Organisatie NVvW
Zie pag. 317 in dit nummer.

vrijdag 22 november
Conferentie 2013
Organisatie ELWIeR